Estratégias para determinar a área de uma superfície irregular no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Nicole Santos

Agrupamento de Escolas D. Dinis, Loulé, Portugal

António Guerreiro[1]

Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve, Portugal
CITED – Centro de Investigação Transdisciplinar em Educação e Desenvolvimento

RESUMO

A aprendizagem da medição de áreas está fortemente marcada, no ensino básico, pela abordagem em figuras geométricas planas e regulares e pela introdução de fórmulas para o seu cálculo. Tendo em consideração esta problemática, definiu-se como objetivo analisar as estratégias que os alunos usam para medir a área de uma superfície irregular, tal como a folha de uma árvore. O estudo foi realizado numa turma do 6.º ano do 2.º Ciclo do Ensino Básico numa escola do concelho de Loulé. De acordo com o objetivo definido utilizou-se, para a realização do estudo, uma metodologia de caráter qualitativo, englobando procedimentos metodológicos próximos dos da investigação-ação. Os instrumentos de recolha de dados foram: (i) as observações diretas, com registos áudios e fotográficos, e (ii) a análise documental das produções dos alunos. Através da análise dos resultados obtidos, foi possível identificar cinco estratégias utilizadas pelos alunos para a medição da área numa superfície irregular: (i) subdividir; (ii) quantificar; (iii) estruturar espacialmente; (iv) enquadrar figuras geométricas regulares; e (v) aplicar fórmulas. Mediante os resultados de cada grupo, verificou-se que quantas mais estratégias aplicadas para medir a área de uma superfície irregular, maior é a complexidade de raciocínio utilizado para realizar tal medição.

Palavras-chave: Matemática; Área de superfície plana; Superfície irregular; Conexões matemáticas; 2.º Ciclo do Ensino Básico.

ABSTRACT

Learning to measure areas is strongly characterised in primary education by the approach to plane and regular geometric figures and by the introduction of formulae for calculating them. With this problem in mind, the aim was to analyse the strategies students use to measure the area of an irregular surface, such as the leaf of a tree. The study was carried out in a 6th grade class in a school in the municipality of Loulé. In accordance with the defined objective, a qualitative methodology was used to conduct the study, encompassing methodological procedures close to those of action research. The data collection instruments were: (i) direct observations, with audio and photographic records, and (ii) documentary analysis of the students' productions. By analysing the results obtained, it was possible to identify five strategies used by the students to measure the area of an irregular surface: (i) subdivide; (ii) quantify; (iii) structure spatially; (iv) frame regular geometric figures; and (v) apply formulas. The results of each group showed that the more strategies used to measure the area of an irregular surface, the greater the complexity of the reasoning used to make this measurement.

Keywords: Maths; Irregular surface; Plane surface area; Mathematical connections; 2nd Cycle of Basic Education.

[1] Endereço de contacto: aguerrei@ualg.pt

1. Introdução

O intuito deste artigo é refletir sobre um estudo empírico que visou analisar as estratégias utilizadas por alunos do 2.º ciclo do ensino básico para determinar a área de uma superfície irregular. Este estudo ocorreu durante o ano letivo de 2022/2023, no âmbito do mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de matemática e ciências naturais no 2.º ciclo do ensino básico da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve (Santos, 2023).
O estudo decorreu num contexto próximo do da investigação-ação, valorizando a recolha de dados em contexto educativo, e integrou quatro tarefas matemáticas na sala de aula. A primeira tarefa desafiou os alunos, através de uma atividade experimental, a explorar a relação entre a área de uma superfície plana e a captação de energia solar. Na segunda tarefa, os alunos determinaram a área de superfície de um painel solar, existentes na região algarvia, através da utilização de algoritmos matemáticos. A terceira tarefa, objetivou a medição da área de uma superfície irregular, a folha de uma árvore, através de estratégias de medição propostas pelos alunos. A quarta e última tarefa incitou os alunos a descobrir a área aproximada da superfície total de folhas de uma árvore, em função de uma contagem estimada do número total de folhas da árvore, através do cálculo multiplicativo em diagrama.
A temática base de investigação emergiu da valorização das conexões externas entre a matemática e as ciências naturais, através do cálculo de áreas em superfícies regulares, em painéis solares, e em superfícies irregulares, nas folhas de uma árvore, tendo por orientação a seguinte questão de pesquisa: Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos do 2.º ciclo do ensino básico para determinar a área de uma superfície irregular?
Nesta conexão externa entre a matemática e as ciências naturais realizou-se uma correlação direta entre a área da superfície e a captação solar dos painéis e das folhas de uma árvore.

2. Conexões matemáticas

O ensino da matemática tem evoluído de uma visão fragmentada e petrificada, degenerada em "compartimentação, fragmentação, isolamento, mecanização, incompreensão" (Carreira, 2010, 13), para uma maior enfâse nas conexões matemáticas, contrariando as "visões e perceções estreitas da Matemática e do trabalho em Matemática" (Carreira, 2010, p. 13). Estas conexões matemáticas promovem "a possibilidade de os alunos conectarem ideias matemáticas para construírem um entendimento mais profundo e duradouro da Matemática" (Bortoli & Bisognin, 2023, p. 252). Torna-se assim imperativo demover a perceção de que esta disciplina é entendida como aquela em que os alunos "só aprendem fórmulas e cálculos" (Ferri, 2010, p. 19), sem realmente entenderem "o papel que a matemática desempenha no mundo real" (Ferri, 2010, p. 19).
O conceito de conexões matemáticas pode ser interpretado em duas dimensões: as conexões internas (Canavarro, 2017; Carreira, 2010; Ponte, 2010) ou conexões intramatemáticas (Flôres & Bisognin, 2022; Jacinto & Pires, 2019) (i) entre os próprios temas matemáticos, "estabelecidas entre conceitos, procedimentos, teoremas, argumentos e representações matemáticas entre si" (Flôres & Bisognin, 2022, p. 3), através de representações múltiplas (Canavarro, 2017), e (ii) da matemática entre os diversos ciclos e níveis de ensino, "indispensáveis para a compreensão de conceitos, representações e correspondentes relações" (Jacinto & Pires, 2019, p. 190); e as conexões externas (Canavarro, 2017; Carreira, 2010; Ponte, 2010) ou conexões extramatemáticas (Flôres & Bisognin, 2022; Jacinto & Pires, 2019) (iii) da matemática com outras áreas do saber e (iv) da matemática com situações e contextos do mundo real.
As conexões externas da matemática "aparecem de forma natural e devem ser devidamente exploradas" (Ponte, 2010, p. 6), são fundamentais no estabelecimento de "uma relação de um conceito ou modelo matemático com um problema no contexto (não matemático) ou vice-versa" (Flôres & Bisognin, 2022, p. 3), tratando-se de "um processo que liga o mundo real e a matemática nos dois sentidos: da realidade para a matemática e (. . .) da matemática para a realidade" (Ferri, 2010, p. 19).

3. Área de uma superfície plana

A área "é um número que atribuímos à extensão de uma superfície qualquer" (Batista, 2014, p. 19), seja esta plana ou curva ou "a quantidade de espaço bidimensional que uma região plana fechada contém" (Clements et al., 2017, p. 71). Contudo, o conceito de área nos currículos escolares está fortemente marcado pela introdução de fórmulas, na determinação da área em figuras geométricas planas, sem atribuição de qualquer significado. Jesuz (2023) defende que o estudo das áreas no currículo escolar deve possibilitar a sua aplicabilidade na vida real do quotidiano dos alunos e ir além do cálculo da "área de triângulos, quadriláteros notáveis, polígonos regulares e círculos" (p. 1). Quando eventualmente surgem problemas para determinar a área em figuras planas irregulares, Scartazzini et al. (2005) alegam que "normalmente é proposta uma divisão da figura em diversas partes, de forma a torná-las próximas de pequenas figuras regulares com equações próprias para cálculo de área" (p. 66) e posteriormente feito o somatório dessas áreas individuais, do qual resulta na área total da figura.

Vários estudos revelam que os alunos do ensino básico apresentam uma compreensão deste conteúdo, no entanto, baseiam-se em procedimentos ou fórmulas memorizadas, apresentando dificuldades em apresentar exemplos ou contraexemplos a conjeturas (Baturo & Nason, 1996; Candeias et al., 2006; Clements et al., 2017; Costa et al., 2020; Runnalls & Hong, 2019). Estas fragilidades caracterizam-se pela utilização de estratégias procedimentais, baseadas em explicações e representações de conceitos através de fórmulas memorizadas e transmitidas aos alunos, ao invés da produção de um entendimento conceitual (Costa et al., 2020).

Candeias et al. (2006) e Runnalls e Hong (2019) defendem que uma das formas mais eficazes dos alunos aprenderem sobre áreas é que, inicialmente, os alunos desenvolvam uma compreensão conceptual de área como uma superfície que pode ser quantificada, através da "medição concreta com instrumentos de medida" (Candeias et al., 2006, p. 2). E, posteriormente, transitarem "da contagem sistemática de quadrados para o desenvolvimento de fórmulas geométricas para a área numa variedade de contextos" (Runnalls & Hong, 2019, p. 632), realizando assim uma transição da estruturação conceptual até à sua generalização e desenvolvimento de fórmulas.

Clements et al. (2017) defendem quatro técnicas que suportam o desenvolvimento da compreensão da medição da área de superfície plana pelos alunos: (i) covering, como o ato de cobrir ou interagir com a unidade, de modo a cobrir espaços para determinar a área; (ii) quantifying, como o ato de quantificar ou "enumerar as unidades da área que cobrem uma região" (p. 73); (iii) subdividing, como o ato de subdividir uma superfície completa em partes, para que seja possível a sua contagem de forma mais eficiente; e (iv) spatial structuring, "é a operação mental de construção de uma organização ou forma, para um objeto ou conjunto de objetos no espaço" (p. 74).

4. Apontamentos metodológicos

O estudo apresentado objetivou analisar as estratégias que os alunos definem para medir a área de uma superfície irregular, a partir da seguinte questão: Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos do 2.º ciclo do ensino básico para determinar a área de uma superfície irregular?

Esta questão de investigação orientou o investigador para a "descrição de processos" (Flick, 2005, p. 51), sendo que, neste caso, o "objetivo é descrever os desenvolvimentos ou mudanças de um dado fenómeno" (Flick, 2005, p. 51). Optou-se assim por uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), atendendo à natureza dos dados e ao significado das ações, englobando procedimentos metodológicos próximos dos da investigação-ação, em que: (i) a investigação é "realizada por pessoas diretamente envolvidas na situação social que é objeto de pesquisa"; (ii) "o ponto de partida da pesquisa é constituído por questões práticas do trabalho quotidiano"; (iii) o trabalho de investigação "implica o respeito e a adequação aos valores e às condições de trabalho na organização"; (iv) "existe um grande ecletismo metodológico no que respeita às técnicas de recolha e tratamento de dados"; (v) existe por parte do investigador "perseverança num esforço contínuo para ligar, relacionar e confrontar ação e reflexão" (Afonso, 2005, p. 75).

O estudo foi concretizado numa instituição pública, num Agrupamento de Escolas do concelho de Loulé, numa turma do sexto ano do 2.º ciclo do ensino básico, composta por um total de vinte e um alunos, dos quais seis do sexo feminino e quinze do sexo masculino, com idades compreendidas entre os onze e os doze anos.

As tarefas matemáticas selecionadas para o estudo foram adaptadas de um artigo denominado "Sun Catchers" (Isabelle & Bell, 2007). Relativamente à organização da sequência didática desenvolvida, é possível enunciá-la em quatro tarefas matemáticas: (i) a área influência a captação de energia solar? (ii) descoberta da área total de um painel solar através de cálculos; (iii) medição da área de superfície de uma folha de uma árvore; (iv) cálculo da área aproximada da superfície total de todas as folhas da árvore.

O plano de intervenção educativa foi realizado tendo em consideração uma perspetiva de valorização da aprendizagem pelo ensino exploratório (Canavarro, 2011). A sequência de tarefas concretizada no presente estudo teve em consideração as quatro fases inerentes ao ensino exploratório da matemática: (i) introdução da tarefa; (ii) realização da tarefa; (iii) discussão da tarefa; e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas (Guerreiro et al., 2015).

As técnicas de recolha de dados foram variadas e incidiram na observação direta dos participantes, com recurso a gravações em áudio, nas ocasiões em que se privilegia o diálogo e o debate em pequeno e grande grupo, nos registos fotográficos das várias produções realizadas pelos alunos, e na análise documental do preenchimento das fichas complementares às tarefas. De acordo com os princípios éticos, o presente estudo seguiu um procedimento capaz de garantir o anonimato dos alunos (através da utilização de nomes fictícios), protegendo assim a integridade dos participantes.

5. Apresentação e análise dos dados

Nesta apresentação e análise de dados referem-se as quatro tarefas matemáticas, anteriormente elencadas, mas incide-se particularmente nas primeira e terceira tarefas dada a sua natureza mais investigativa e menos procedimental.

5.1. Influência da área da recolha de energia solar

Como proposta de primeira tarefa, foi lançada uma questão problema aos alunos e sucedeu-se um diálogo:

> Professora (primeira autora): – À vossa frente estão dois tabuleiros de alumínio. Um tem o dobro da área da base do outro. Se despejarmos meio litro de água, à temperatura ambiente, em cada um dos tabuleiros e estes forem colocados ao sol por vinte minutos, o que é que acham que vai acontecer à temperatura da água em cada um dos tabuleiros?
> Gabriel: – Acho que um deles vai ficar mais quente que o outro.
> Professora: – E qual deles é que vai ficar mais quente?
> Gabriel (pausa longa para pensar): – Acho que é… não tenho a certeza.
> Professora: – Qual é o que tem maior área da base?
> Gonçalo (aponta para o tabuleiro maior): – É aquele.
> Professora: – Então e qual deles é que vocês acham que a água vai atingir uma maior temperatura?
> Gabriel: – Acho que é o da esquerda (refere-se ao maior).
> Professora: – Porquê?
> Gabriel: – Porque a água está mais dividida, não está tão junta.
> Professora: – Obrigada Gabriel. Mais alguém quer dar a sua opinião?
> Pedro: – É que a mais pequenina vai atingir uma temperatura mais quente porque é menor, então, ou seja, absorve mais.
> Professora: – Aqui temos outra opinião diferente. Mais alguém quer participar? Sim Rafael.
> Rafael: – Acho que a pequenina vai atingir uma temperatura mais alta porque o sol bateu mais nela?
> Professora: – O que queres dizer com isso?
> Rafael: – Porque é mais pequena…
> Professora: – Porque a área da base é menor?
> Rafael (um pouco incerto): – Sim.

Posteriormente, foi solicitado a todos os alunos o preenchimento, por escrito e individualmente, das suas previsões numa folha, seguida de uma breve fundamentação. De forma a focalizar o pensamento dos alunos, as previsões foram sugeridas através de três opções: (a) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com menor área da base; (b) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com maior área da base; e (c) A temperatura final vai ser igual nos dois tabuleiros.

Através da análise documental do preenchimento das previsões, foi possível constatar que, dos quinze alunos, que participaram na aula, doze consideraram a opção (a); dois consideraram a opção (b); e um considerou a opção (c). Através dos resultados obtidos, tendo em conta que a opção correta é a (b), verifica-se que a grande maioria não depreende de que forma é que a área de uma superfície influencia a recolha de energia solar.

Todos os alunos que escolheram a opção (a) apresentam justificadamente a conceção alternativa de que uma menor área absorve mais energia solar. Os alunos que selecionaram a opção (b) demonstraram compreender que a área da base do tabuleiro maior resulta numa dispersão maior da mesma quantidade de água e que, consequentemente, vai possuir uma altura menor, o que faz com que a absorção de energia solar seja maior, resultando numa maior subida de temperatura. A aluna que selecionou a opção (c) não apresenta noções sobre a influência que a área tem sobre a recolha de energia solar, uma vez que afirma que a temperatura da água irá ser igual em ambos os tabuleiros, independentemente da área da base de cada um.

Tendo em conta uma grande maioria de conceções incorretas, a colocação da atividade em prática tornou-se crucial, na iminência de desconstruir estas perspetivas e favorecer momentos de aprendizagem exploratória. A preparação da tarefa foi realizada através da sua demonstração, juntamente com a participação ativa dos alunos. Primeiramente, foi feito o cálculo da área de cada uma das bases dos tabuleiros, para verificar que um tinha aproximadamente o dobro da área da base do outro:

> Professora: – Como é que nós vamos calcular a área da base destes tabuleiros?
> David: – Medindo.
> Professora: – Mas como?
> Gonçalo: – Com o raio e o Pi.
> Professora: – O raio e o Pi servem para medir a área de que figura geométrica? (não foram obtidas respostas). – O que é que nós fizemos nas aulas anteriores? Aprendemos a medir a área de quê?
> Vários alunos (simultaneamente): – Do círculo!
> Professora: – E a base deste tabuleiro parece-vos um círculo?
> Vários alunos (simultaneamente): – Não.
> Rúben: – É um retângulo.
> Professora: – Muito bem. E como é que se mede a área de um retângulo?
> Hugo: – Lado vezes lado.
> Professora: – Lado vezes lado se fosse…
> Hugo: – Um quadrado.
> Professora: – Neste caso como são retângulos como é que se calcula?
> Rafael: – A altura mais a largura.
> Professora: – A altura mais a largura?
> Rúben: – O comprimento e a largura.
> Pedro: – É o comprimento vezes a largura.

Através deste diálogo com os alunos foi possível analisar que um aluno confundiu conceitos de medição da área de outras figuras geométricas, neste caso do círculo, com a medição da área de um retângulo. Quando questionados sobre como calcular a área de um retângulo, o Hugo soube identificar que se multiplicava um lado pelo outro, no entanto a terminologia de lado vezes lado é utilizada quando se fala de uma figura geométrica com os lados todos iguais. Quando questionados sobre a terminologia correta, o Rafael menciona que é através do cálculo altura mais a largura. Novamente, um aluno demonstra confundir conceitos matemáticos de medida, entre diferentes figuras geométricas, os quais foram corrigidos por dois colegas.

Os dados recolhidos, tais como o cálculo da área da base do tabuleiro, a quantidade de água despejada para cada tabuleiro e a temperatura inicial da água foram registados numa tabela. É de salientar que o preenchimento foi realizado de forma semelhante por todos os alunos. Quanto ao registo na coluna da área da base, todos os alunos registaram as medidas do comprimento, da largura e o resultado da multiplicação entre elas, exceto dois alunos que apenas registaram o resultado.

O registo da quantidade de água foi realizado de diversas formas: seis alunos representaram 0,5L; oito alunos representaram por extenso meio litro; e dois alunos representaram 500ml. Relativamente ao registo da temperatura inicial, a maioria dos alunos evidenciou um registo acompanhado da simbologia correta dos graus Celsius (ºC), no entanto houve dois alunos que não registaram a simbologia da temperatura corretamente. No que diz respeito ao preenchimento da coluna do «prevejo que», a maioria dos alunos descreveu aquilo que achavam que iria acontecer à temperatura da água por comparação com a outra, à exceção de um aluno que previu as temperaturas exatas que as águas iriam atingir.

Os tabuleiros foram colocados ao sol durante vinte minutos e, no tempo de espera pelos resultados, foi realizada a tarefa do cálculo da área de um painel solar, tarefa matemática seguinte. Após os vinte minutos de espera, realizou-se a medição da temperatura final, em ambos os termómetros dentro dos tabuleiros e chegou-se ao resultado de uma temperatura da água de 28ºC no tabuleiro 1 (maior área da base), e 26ºC no tabuleiro 2 (menor área da base). Antes da reflexão em grande grupo sobre os resultados obtidos, foi solicitado aos alunos que realizassem as suas reflexões individuais, por escrito.

Todos os alunos evidenciaram uma conclusão correta, com justificações plausíveis face aos resultados obtidos. É notável que alguns alunos enfatizaram mais a justificação da diferença de temperaturas baseando-se na maior dispersão e menor altura da água no tabuleiro de maior área da base, enquanto outros alunos focaram-se mais em justificar esta diferença como resultado da diferença de áreas de ambas as bases dos tabuleiros. Como forma de conclusão e reflexão em grande grupo, chegou-se à conclusão de que a diferença de temperaturas se deveu a ambas as razões supramencionadas.

5.2. Cálculo da área de um painel solar

A segunda tarefa que consistiu no cálculo da área de um painel solar, existente na região algarvia, usando as suas dimensões reais, incidiu na relação entre a tarefa anterior e a captação de energia solar através dos painéis solares. O trabalho autónomo dos pares de alunos consistiu no cálculo da área de um painel solar com os valores fornecidos.

Através da análise documental dos cálculos realizados, foi possível constatar que, dos 15 alunos, 10 apresentaram cálculos corretos e 5 apresentaram cálculos incorretos. Dos 10 alunos que apresentaram os cálculos corretos, cinco apresentaram os cálculos corretos acompanhados das respetivas unidades de medida. Dos outros cinco, três não apresentaram as respetivas unidades de medida e dois colocaram incorretamente as unidades de medida.

Os 5 alunos que apresentaram os cálculos incorretos revelaram falta de compreensão relativamente aos dados fornecidos no enunciado do problema, o que demonstrou uma ausência de conexão entre os dados do problema e os cálculos matemáticos adequados.

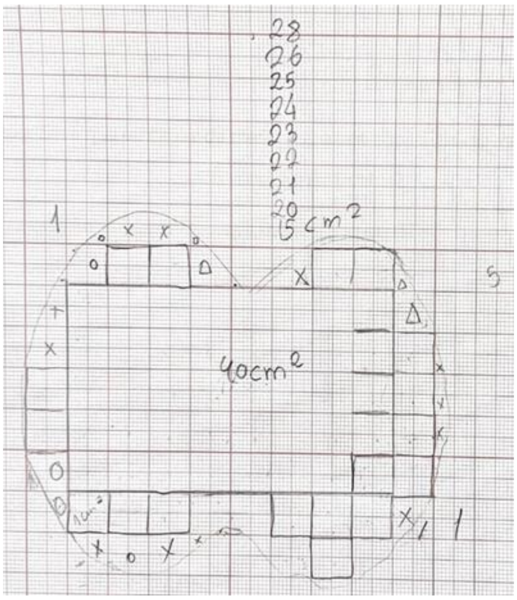
5.3. Medição da área de superfície da folha de uma árvore

A proposta da terceira tarefa foi realizada através da conexão entre as tarefas anteriores, ou seja, a relação entre a área da superfície e a recolha de energia solar, com as folhas das árvores, visto que estas são captadoras naturais de energia solar. Como proposta de tarefa, os alunos foram desafiados a calcular a área da superfície de uma folha de uma árvore, que foi previamente escolhida pelos próprios alunos, dentro do recinto escolar. Os alunos presentes foram reunidos, em quatro grupos de cinco elementos cada, e foi distribuído a folha de registos da tarefa e o material de trabalho: duas folhas de árvore; calculadora; régua; tesoura; material de escrita; e papel milimétrico. O papel milimétrico era desconhecido de todos os alunos, tendo sido necessário realizar, grupo a grupo, uma breve explicação do mesmo.

É importante referir que o método de cálculo da área de superfície das folhas ficou inteiramente ao critério dos alunos, tendo sido os mesmos a discutir, dentro dos pequenos grupos de trabalho, qual a técnica mais adequada. As únicas intervenções realizadas pela professora foram na entrega do material e no acompanhamento do trabalho autónomo, nomeadamente no auxílio de eventuais dúvidas e na supervisão em termos de comportamento, assim como da cooperação entre os elementos dos grupos de trabalho. As estratégias dos quatro grupos de alunos caracterizam-se por alguns procedimentos comuns e outros divergentes ou complementares.

O Grupo Um iniciou de imediato o debate sobre a técnica mais adequada para medir a área de superfície da folha, tendo optado por realizar a sobreposição da folha de árvore sobre o papel milimétrico e rodeado pela extremidade (Figura 1).

Figura 1. Registo em folha de papel milimétrico pelo grupo um



De seguida optaram por repartir a superfície num retângulo máximo e em pequenos quadrados de valor unitário:

> Professora: – Então grupo um, já chegaram a alguma conclusão para calcular a área?
>
> Pedro: – Pois, chegámos à conclusão de que vamos fazer esse quadrado [retângulo] para saber exatamente a medida por dentro, para depois só contar à volta, para saber exatamente os centímetros que é preciso.

A estratégia utilizada concretizou-se com o cálculo da área de um retângulo, através do produto das suas dimensões, na contabilização dos quadrados inteiros restantes em redor do retângulo, e na contabilização do número de outros quadrados resultante da composição de pequenas superfícies:

> Professora: – Como é que vocês realizaram o cálculo da área entre o retângulo e a margem da folha?
>
> Mariana: – Nós tínhamos um total de dezasseis quadrados completos à volta, mas nós descobrimos que se nós completarmos… está aqui meio quadrado, nós encontrámos dentro da folha outro pedacinho que pode completá-lo. Então fica um quadrado completo novo. Nós estávamos com dezasseis e passamos a ter vinte e oito completos à volta do retângulo.
>
> Pedro: – E depois somamos os vinte e oito aos quarenta que já tínhamos.

O grupo um definiu como técnica, para medição da área, a sobreposição da folha da árvore em papel milimétrico, posteriormente rodeou pela sua extremidade, identificou o maior retângulo interno existente, realizou os cálculos necessários, e a contagem dos restantes quadrados completos e incompletos, com junção de superfícies.

O Grupo Dois começou por identificar o papel milimétrico, como instrumento de auxílio no cálculo da medida de áreas:

> Professora: – Em que técnicas de medição pensaram?
>
> Rúben: – Isso é uma folha quê?
>
> Professora: – Isto é uma folha de papel milimétrico. Para que é que serve Rúben?

Sensos-e | Vol. XII – n.º 2 | 2025 | DOI 10.34630/sensos-e.v12i2.5941

Rúben: – Para medir milímetros, centímetros, as coisas.

Joana: – A área!

Professora: – Sim. Também dá para facilitar o cálculo da área, por exemplo.

Este grupo dois optou por recortar o papel milimétrico, por sugestão inicial da docente, transformando-o num modelo da folha da árvore:

David: – Podemos cortar a folha com a tesoura?

Professora: – Da árvore?

David: – Sim.

Professora: – Podes. Também podem cortar a folha de papel milimétrico.

Joana: – Tive uma ideia!

Professora: – Tiveste? Diz lá qual foi a ideia, Joana.

Joana: – Se nós traçarmos aqui isto, rodearmos, e depois cortamos, se calhar nós podemos fazer as contas e descobrir.

Professora: – Parece-me uma ideia interessante. Ouviram, grupo?

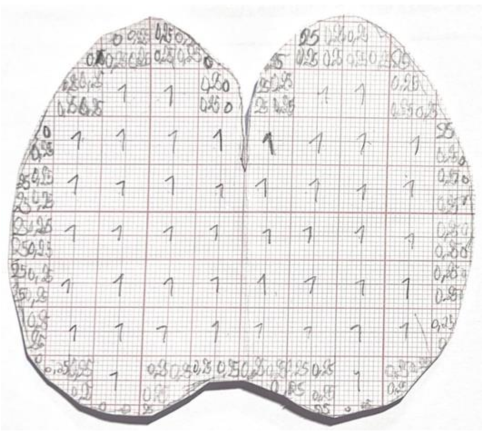
Afonso: – Não percebi.

Professora: – Ok. Joana, explica lá a tua ideia outra vez com mais calma.

Joana: – Se nós traçarmos aqui (apontando para a extremidade da folha da árvore), e rodearmos, depois cortarmos tudo pela medida da folha, se calhar nós podemos fazer as contas com a folha e podemos descobrir a área.

O grupo dois avançou com a proposta de sobrepor a folha da árvore sobre o papel milimétrico, rodear a folha pelas extremidades e depois recortar com a tesoura a folha de papel milimétrico, transformando o papel milimétrico num modelo da folha da árvore (Figura 2).

Figura 2. Registo em folha de papel milimétrico pelo grupo dois



A estratégia do grupo dois passou por identificar individualmente todos os quadrados completos com 1 cm^2 de área e, posteriormente, dividir os quadrados incompletos em quatro quadrados menores de 0,25 cm^2 de área.

Professora: – Então grupo dois, como é que mediram a área?

Marlene: – Então, contamos uns e depois a Joana escreveu os zero vírgula vinte e cinco no resto dos quadrados mais pequenos, e depois contámos tudo e agora vamos fazer uma conta dos uns mais os zeros vírgula vintes e cinco.

Afonso: – Mas ainda nos falta contar aqui alguns cantinhos.

Apesar da preocupação do Afonso, o grupo optou por desprezar as áreas inferiores:

Professora: – Então e os restantes quadrados mais pequenos, como é que os contaram?

Afonso: – Não contamos.

Professora: – Ignoraram?

Afonso: – Sim.

O grupo dois não teve em consideração as restantes áreas, correspondendo a quadrados incompletos, próximos da extremidade da folha, resultando numa estimativa da medição da área por defeito.

O Grupo Três definiu como estratégia a reconfiguração da folha da árvore em figuras geométricas familiares como quadrado, retângulo e círculo:

Professora: – Quais são as técnicas em que pensaram?

João: – A do quadrado.

Professora: – Qual quadrado?

João: – Lado vezes lado. Nós medimos os lados (apontando para uma das metades da folha).

Professora: – E acham que esta metade se parece com um quadrado?

Luís: – Não.

Professora: – A mim parece-me mais um retângulo do que um quadrado. Pensaram em mais alguma técnica de medição?

Tomás: – Mais nenhuma.

Professora: – Então tentem lá calcular da forma que me explicaram.

A estratégia usada passou pela transformação da folha da árvore em dois retângulos, complementados por círculos (em função da curvatura da folha da árvore):

Professora: – Grupo três, o que é que estamos a fazer?

João: – Estamos a medir os retângulos. Nós dividimos a folha ao meio e estamos a medir os retângulos, e depois com as pontas fazemos um círculo para medir. Fizemos com os dois lados da folha e agora vou somar.

Esta estratégia não foi bem-sucedida porque os alunos optaram por desenhar retângulos circunscritos (em lugar de inscritos) à superfície da folha da árvore, resultando num valor de área da superfície superior (em lugar de inferior) ao valor real. Ainda adicionaram áreas de formas circulares, atendendo à curvatura de parte da folha da árvore, o que poderia ser adequado no caso da inscrição de retângulos:

Professora: – João, como é que estão os cálculos?

João: – Eu medi seis vírgula cinco daqui e seis vírgula cinco daqui…

Professora: – Esse valor é o quê?

João: – É o comprimento.

Professora: – Sim, de cada lado da folha. E que mais?

João: – Depois eu fiz vezes a largura.

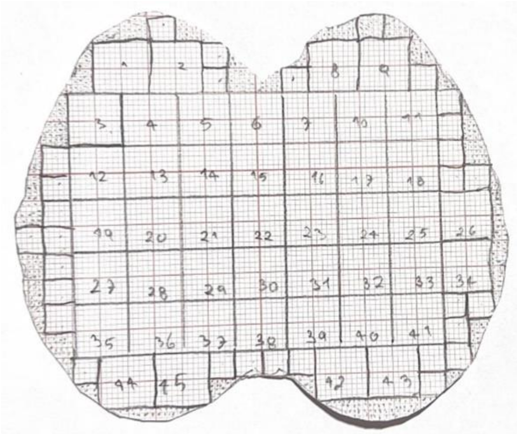
Professora: – De cada metade?

João: – Sim, agora vou fazer os círculos.

O João e a Catarina (dois dos elementos do grupo) testemunham a estratégia: "Nós dividimos a folha ao meio e medimos o comprimento e a largura e calculámos a área. Usámos as pontas como fosse círculos e no final calculámos a área de cada parte da folha e no final calculámos as duas partes e deu a área final". A transformação da folha da árvore numa composição de figuras conhecidas como retângulos e círculos, poderia ser uma das estratégias, mas este grupo reformulou a sua estratégia de medida em função da complexidade e desadequação dos valores obtidos em virtude de medirem várias áreas sobrepostas sempre por excesso. Posteriormente, o grupo três optou por uma estratégia similar à realizada pelo grupo dois (Figura 3):

Sensos-e | Vol. XII – n.º 2 | 2025 | DOI 10.34630/sensos-e.v12i2.5941

Figura 3. Registo em papel milimétrico pelo grupo três



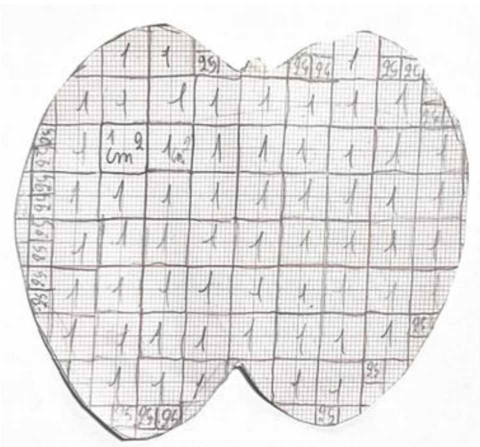
Não desprezando os valores inferiores a um quarto de centímetro quadrado, estes alunos contabilizaram os milímetros quadrados: "Nós passamos a folha para o papel. Depois fizemos um retângulo para saber quantos cm^2 tinha e contamos os quadrados à volta do retângulo que deu 1344 mm^2 [trinta quadrados de 0,25 cm^2, 750 mm^2, mais os 594 mm^2]. Depois somamos os cm^2 mais os mm^2 que deu 58,4 cm^2".

O Grupo Quatro iniciou a sua estratégia de medição tentando transformar a folha da árvore em figuras geométricas conhecidas, como um círculo:

> Professora: – Grupo quatro, o que é que nós estamos a fazer?
> Hugo: – Ele está a cortar.
> Gabriel: – Nós estamos a rodear e a cortar.
> Professora: – Muito bem, continuem. Isto aqui é o quê?
> Hugo: – Isso aí foi outra coisa que nós tentamos, que era o diâmetro da folha, mas depois percebemos que não dava.

Os alunos justificaram que tentaram calcular a área da folha através da medição do diâmetro da mesma, no entanto, aperceberam-se que a medida do diâmetro não é igual em toda a folha, pois apesar desta se assemelhar a um círculo, o resultado não iria se aproximar da medida real da área. Posteriormente, optaram pela sobreposição da folha da árvore em papel milimétrico, rodear pela sua extremidade e recortar o papel milimétrico (Figura 4).

Figura 4. Registo na folha de papel milimétrico pelo grupo quatro



De forma similar ao grupo dois, atendendo aos quadrados de 1 cm^2 e de 0,25 cm^2 de área:

Professora: – Este valor sessenta e cinco é o quê?
Gabriel: – São os quadrados completos.
Professora: – E as sete unidades e vinte e cinco centésimas?
Sabrina: – São os quadrados de zero vírgula vinte e cinco.
Professora: – Muito bem. Agora faltam os de menor área.

Para o cálculo dos quadrados de 1 mm^2 foi necessária uma breve explicação, dada pela professora, usando a folha de papel milimétrico, sobre o que é um centímetro quadrado, o que é um milímetro quadrado, e a quantidade de milímetros quadrados dentro de um centímetro quadrado. O grupo quatro manifestou dificuldade na conversão de milímetros quadrados em centímetros quadrados:

Hugo: – Professora! Contámos os quadrados mais pequenos e deu duzentos e oitenta milímetros.
Professora: – Boa! E vais calcular em milímetros?
Hugo: – Não, tem de ser em centímetros.
Professora: – Centímetros quê?
Hugo: – Centímetros quadrados.
Professora: – Então dá quanto a conversão?
Gabriel: – Dá vinte e oito.
Professora: – Não é vinte e oito. Dos milímetros quadrados para centímetros quadrados recuamos a vírgula dois algarismos. Façam lá a conversão.
Hugo: – Dá dois vírgula oito.
Professora: – Dois vírgula oito quê?
Hugo: – Centímetros quadrados.

Após a identificação de todas as parcelas, os cálculos relativos à sua adição foram efetuados com precisão na determinação da área da superfície da folha da árvore em cm^2.

5.4. Cálculo da área aproximada da superfície total de folhas da árvore

A quarta e última tarefa consistiu na realização do cálculo de uma estimativa do número de folhas de uma árvore, através da técnica de multiplicação em diagrama (contagem de ramos principais, secundários, de galhos e de folhas), e a consequente descoberta da área de superfície total das folhas de toda a árvore. Após efetuadas as contagens, realizou-se o cálculo multiplicativo do número de ramos principais, pelo número de ramos secundários, pelo número de galhos, pelo número de folhas e obteve-se uma estimativa do número total de folhas da árvore. Os alunos deslocaram-se até à árvore em estudo e, organizados nos respetivos grupos de trabalho, recolheram as informações necessárias e preencheram a respetiva tabela de registos.

6. Discussão dos resultados

De forma a realizar uma síntese da análise dos resultados provenientes das produções dos alunos, relembra-se que o objetivo do estudo foi investigar quais as estratégias que os alunos definem para determinar a área de uma superfície irregular. Neste estudo foram identificadas cinco estratégias de cálculo da área: (i) subdividir; (ii) quantificar; (iii) estruturar espacialmente (Clements et al., 2017); (iv) enquadrar figuras geométricas regulares; e (v) aplicar fórmulas.

Relativamente às estratégias de (i) subdividir e (ii) quantificar, verificou-se que os grupos utilizaram estas técnicas para subdividir a área da folha em unidades de área ou partes da unidade e quantificá-las, com o auxílio da folha de papel milimétrico. Num dos grupos verificou-se a técnica de quantificar quadrados unitários por completamento de pequenas áreas restantes.

Afere-se que dois dos quatro grupos utilizaram as estratégias de (iv) enquadrar figuras geométricas regulares e (v) aplicar fórmulas, sendo que num dos grupos foi feito o enquadramento de dois retângulos e dois círculos, em cada uma das metades da folha, e foram calculadas as áreas pelas suas respetivas fórmulas, enquanto um outro grupo enquadrou um retângulo no interior do perímetro delimitado e calculou a área pela sua respetiva fórmula.

No que diz respeito à técnica de (iii) estruturar espacialmente (Clements et al., 2017), esta técnica foi apenas reconhecida no grupo um, uma vez que evidenciaram a utilização de todas as técnicas supramencionadas, o que demonstra uma complexidade superior de medição e evidencia a capacidade de estruturar espacialmente a medição da área de figuras irregulares bidimensionais.

É importante salientar que os resultados obtidos resultaram de um processo caracterizado por várias etapas e constrangimentos, que resultou em valores diferentes de grupo para grupo. De salientar que o tamanho das folhas utilizadas para calcular a área das mesmas, apesar de serem da mesma árvore e recolhidas com tamanhos semelhantes, os cálculos e as aproximações por excesso e por defeito realizados pelos alunos fez com que os valores da sua área fossem diferentes. Sublinha-se também a decisão dos alunos na escolha de qual dos ramos secundários e qual dos galhos utilizaram para realizar a contagem, o que resultou, também, em valores diferentes na estimativa do número de folhas da árvore.

Quanto às tarefas restantes, houve diversos indicadores ao longo deste estudo de que os alunos se basearam em procedimentos e em fórmulas memorizadas, no cálculo para a medição de áreas: (i) certas intervenções despropositadas de alunos, como sugerir a utilização do raio e o pi ou realizar a altura mais a largura para o cálculo da área de um retângulo; (ii) a realização de cálculos corretos sem estarem acompanhados das respetivas unidades de medida ou a colocação incorreta das unidades de medida; (iii) a incapacidade de aplicar as noções do cálculo de área em contexto de resolução de problemas, relacionando corretamente os dados do problema e os cálculos matemáticos adequados; (iv) alguma dificuldade de visualização do quadrado como unidade de medida para a área; e (v) a aplicação e a utilização de fórmulas do cálculo do círculo e do retângulo sem sentido no contexto de resolução do problema (Baturo & Nason, 1996; Candeias et al., 2006; Clements et al., 2017; Costa et al., 2020; Runnalls & Hong, 2019).

7. Considerações finais

A abordagem pedagógica apresentada suscitou de um interesse significativo em explorar uma ótica do campo conceptual e pedagógico matemático, relativamente a um tema evidentemente pouco aprofundado teoricamente: a determinação de áreas em superfícies irregulares com alunos do 2.º ciclo do ensino básico (Jesuz, 2023). Após a análise dos dados, é possível concluir que as estratégias podem compreender-se em cinco categorias: (i) subdividir; (ii) quantificar; (iii) estruturar espacialmente (Clements et al., 2017); (iv) enquadrar figuras geométricas regulares; e (v) aplicar fórmulas. Através da análise dos resultados de cada grupo, verifica-se que quantas mais estratégias aplicadas para medir a área de uma superfície irregular, maior é a complexidade de raciocínio utilizado para realizar tal medição.

A diversidade de estratégias e procedimentos matemáticos para o cálculo da área de uma folha de uma árvore, apesar de terem por base a utilização do papel milimétrico, também possibilitou a conexão entre ideias matemáticas (Bortoli & Bisognin, 2023), através representações múltiplas (Canavarro, 2017), num contexto entre a matemática e o mundo real (Ferri, 2010).

As tarefas propostas foram propositadamente planificadas de modo a criar um fio condutor entre elas, seguindo uma sequência intencional, que permitisse cruzar a matemática com outras áreas de saber (Ministério da Educação, 2021), com especial enfoque no estabelecimento de conexões externas entre a matemática e as ciências naturais.

Referências

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em Educação. Um guia prático e crítico.* Edições Asa.

Batista, F. S. (2014). *Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não-convexos* [Tese de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande]. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFCG. https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFCG_35ec08ead6576869405e68cdbee03be2

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*, 235-268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Bortoli, M. F., & Bisognin, V. (2023). Conexões matemáticas no ensino de progressões aritméticas de ordem superior. *Bolema*, *37*(75), 250-270. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a12

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1982

Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, *144-145*, 38-42. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2453

Candeias, N., Costa, S., Molarinho, M., Simões, A, Garcia, C., Marques, I., Marques, S., Rocha, G., Silvestre, A., & Ponte, J. (2006). Estratégias e dificuldades dos alunos portugueses do 2.º ciclo do ensino básico em visualização, medida e área. *Actas do XVII SIEM*. https://www.researchgate.net/publication/237393978_Estrategias_e_dificuldades_dos_alunos_portugueses_do_2_ciclo_do_ensino_basico_em_visualizacao_medida_e_area

Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas – Ligar o que se foi desligado. *Educação e Matemática*, *110*, 13-18. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1896

Clements, D. H., Sarama, J., & Miller, A. L. (2017). Area. In J. E. Barrett, D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Children's measurement: a longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume* (pp. 71–82). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). https://www.nctm.org/Store/Products/JRME-Monograph-16--Children-s-Measurement--A-Longitudinal-Study-of-Children-s-Knowledge-and-Learning-of-Length,-Area,-and-Volume/

Costa, A. P., Vilaça, M. M., & Melo, L. V. (2020). O ensino de grandezas e medidas em um documento curricular oficial para o ensino básico. *Ensino em Re-Vista*, 27(3), 934-955.vhttps://doi.org/10.14393/ER-v27n3a2020-7

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, *110*, 19-25. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1897

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Monitor.

Flôres, M. V., & Bisognin, V. (2022). Conexões matemáticas evidenciadas na resolução de problemas: um estudo em nível superior. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Edição Especial, 1-17. https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15668

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, *23*(44), 279 – 295. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539

Isabelle, A. D., & Bell, K. N. (2007). Sun catchers. *Teaching Children Mathematics*, *13*(8), 414–423. https://www.jstor.org/stable/41198984

Jacinto, H., & Pires, M. V. (2019). Tarefas e recursos para a promoção de conexões matemáticas. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. T. Ferreira, & I. Vale (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2019, Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 189-195). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM). https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2019.pdf

Jesuz, D. A. F. (2023). Cálculo de áreas de regiões irregulares com o teorema de Pick: Relato de experiência com estudantes. *Anais do XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática* (EPREM). https://sbemparana.com.br/xvieprem/anais/545371.pdf

Ministério da Educação (2021). A*prendizagens Essenciais da Matemática.* Editorial do Ministério da Educação – Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Ponte, J. P. (2010). Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *110*, 3-6. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1894

Runnalls, C., & Hong, D. S. (2019). "Well, they understand the concept of area": pre-service teachers' responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal*, *32*, 629-651. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00274-1

Santos, N. (2023). *Estratégias para determinar a área de uma superfície irregular no 2.º ciclo do ensino básico* [Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Algarve]. Repositório da Universidade do Algarve. https://sapientia.ualg.pt/entities/publication/c2b89ea1-65a2-4649-aad2-9ae7a6a5c048

Scartazzini, L. S., Silva, J. T. V., & Consul, R. Á. (2005). Metodologias para determinar áreas em superfícies irregulares no ensino da geometria aplicando a proporcionalidade. *Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *7*(2), 65-70. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/180