

# **O MODELO DE MARKOWITZ**

## **– APRESENTAÇÃO E ENQUADRAMENTO EMPÍRICO**

*Adalmiro Andrade Pereira*

### **RESUMO**

*O modelo de Markowitz tem como principal objectivo, a criação de um Portfolio, ou de uma carteira de títulos, do qual resulte a maximização da taxa de retorno para um determinado nível de risco assumido pelo investidor. A optimização do modelo consiste na análise, no desenvolvimento e na construção de uma carteira de títulos, tendo sempre presente o conceito de eficiência.*

### **SUMÁRIO**

#### **INTRODUÇÃO**

#### **1. PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE UM PORTFOLIO**

#### **2. O MODELO MARKOWITZ – APLICAÇÃO**

*2.1 – Conceito de Eficiência*

*2.2 – Investimento/Retorno associado a um Portfolio*

*2.3 – A Quantificação do Risco*

*2.3.1 – Risco no contexto de um Portfolio*

*2.3.2 – O Efeito da Diversificação*

*2.4 – Risco Sistemático e o Risco Não Sistemático (ou Risco Diversificado)*

*2.4.1 – A Venda a Descoberto (“Short Selling”)*

#### **3. MODELOS TEÓRICOS - INPUTS NECESSÁRIOS**

*3.1 – “Asset allocation”*

*3.2 – Características da Relação Risco-Retorno de Classes de Activos*

#### **4. A CONSTRUÇÃO DA FRONTEIRA DE EFICIÊNCIA**

*4.1 – A aversão ao risco*

*4.2 – Expandir as Classes do Activo*

#### **5. CONCLUSÃO**

#### **BIBLIOGRAFIA**

## INTRODUÇÃO

O modelo de Markowitz tem como principal objectivo a criação de um Portfolio que proporcione a maior retorno possível para determinado nível de risco. Este processo é conhecido como o paradigma da optimização da construção de um Portfolio, tendo este o nome de Portfolio eficiente – “*efficient Portfolio*”.

A optimização do modelo consiste na análise e desenvolvimento pormenorizado do processo de construção, tendo em vista sempre o conceito de eficiência. Este processo obteve uma adesão relevante por parte dos investidores que procuravam determinar a melhor forma de gerir as várias classes de títulos que possuíam. Este processo, chamado “*asset allocation*”, é praticável e exequível, porque é limitado o número de títulos considerado. Para além desse número o modelo não é perfeitamente ajustado, sendo possível e recomendada a utilização de uma outra metodologia.

Este trabalho é uma tentativa por um lado, de fazer a apresentação teórica do modelo e por outro demonstrar a sua aplicabilidade, com as consequentes insuficiências ou limitações.

### 1. PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE UM PORTFOLIO

O processo de construção de um Portfolio compreende as seguintes fases:

1.<sup>a</sup> - Esta fase compreende o estabelecimento e a definição do universo de títulos. Se, anteriormente, os investimentos se realizavam na área das acções e obrigações do mercado nacional, numa evolução posterior têm vindo a incluir acções e obrigações dos mercados estrangeiros, depósitos, assim como outros investimentos imobiliários. Isto porque, embora o número de classes de activos seja limitado, o número de títulos em cada uma das classes pode ser substancial diferenciada.

2.<sup>a</sup> - Nesta fase os investidores vão desenvolver as suas expectativas face ao potencial rendimento e ao risco potencial subjacentes a combinação dos títulos em carteira. Para além disso, as estimativas devem estar devidamente explicitadas para que se seja capaz de poder fazer comparações entre todas as classes de activos. O valor do resultado do Portfolio irá depender essencialmente da qualidade e do grau de significância destas estimativas.

3.<sup>a</sup> - Nesta fase procede-se à selecção dos títulos de uma forma individual e determina-se a sua ponderação, ou o peso no Portfolio. Para além de se efectuar uma análise comparando o risco com o retorno de cada título é também necessário analisar a correlação que existe entre os diversos títulos.

## **2. O MODELO MARKOWITZ - APLICAÇÃO**

A assunção fundamental do modelo é que os investidores são aversos ao risco. Tal facto significa que os investidores irão requerer uma compensação ou prémio de acordo com o nível de risco a que estão sujeitos pelo seu investimento. Consequentemente, se por exemplo, for dado a escolher a um investidor dois títulos com igual taxa de retorno, este irá optar por aquele que tenha o mais baixo nível de risco. Esta acepção significa que o investidor maximiza mais a utilidade esperada do que tentar maximizar o rendimento esperado. A utilidade, considerada como uma medida de satisfação do investidor, considera a relação risco e retorno, face ao seu conceito de utilidade. Um investidor averso ao risco vai optar pelo título que está sujeito a menores variações possíveis no retorno esperado, ou seja vai optar por aquele que tem menor variância associada.

Relativamente à relação risco/retorno, títulos com diferentes níveis de risco tendem a diferir na sua taxa de retorno, devendo-se ainda notar que títulos com um alto risco tendem a estar acompanhados por um alto retorno, ou rendimento esperado. Esta evidência demonstra que os investidores requerem um alto rendimento para aceitar um risco elevado.

Presumindo a aversão ao risco, Markowitz desenvolveu um modelo de análise do Portfolio que tem como pressupostos os seguintes pontos:

1.<sup>o</sup> - as duas características relevantes de um Portfolio são o retorno esperado e a medida de dispersão desse mesmo retorno (variância).

2.<sup>o</sup> - os investidores racionais irão escolher Portfolios eficientes, correspondendo aqueles que maximizam o retorno esperado face a um dado nível de risco que estão dispostos a aceitar ou alternativamente, minimizam o risco para um dado nível de retorno requerido, conforme sejam accitantes ou aversos ao risco.

3.<sup>o</sup> - é possível identificar Portfolios eficientes através de uma análise própria para cada título através da relação ou confronto entre o

retorno esperado e a variância do retorno bem como a variância entre o retorno para cada título e qualquer outro investimento.

4.º - Finalmente, um programa informático pode permitir o cálculo correspondente da determinação do Portfólio eficiente, indicando-se para isso qual a proporção no fundo de investimentos que deverá ser utilizado em cada investimento, mediante a opção entre a maximização do retorno requerido para um dado nível de risco ou a minimização do risco a aceitar para um dado nível de retorno.

## **2.1. Conceito de Eficiência**

A noção de eficiência pode ser ilustrada pelo gráfico n.º 1<sup>1</sup>. O eixo vertical refere-se ao retorno esperado, enquanto que o eixo horizontal ao risco, podendo este ser medido pelo desvio padrão do retorno, e finalmente a área sombreada representa os possíveis Portfólios para um dado grupo de investimentos. Para diferentes níveis de retorno e risco, estão associados conjuntos de possíveis Portfólios, representados precisamente por cada ponto no gráfico. Note-se que a zona de eficiência é representada pelo espaço entre os pontos A e B. Os Portfólios ao longo desta linha, que é designada, de fronteira de eficiência, sobrepõem-se aqueles que estão abaixo dela, dado que oferecem um retorno mais elevado para um equivalente nível de risco, ou têm um menor risco para um nível de retorno equivalente.

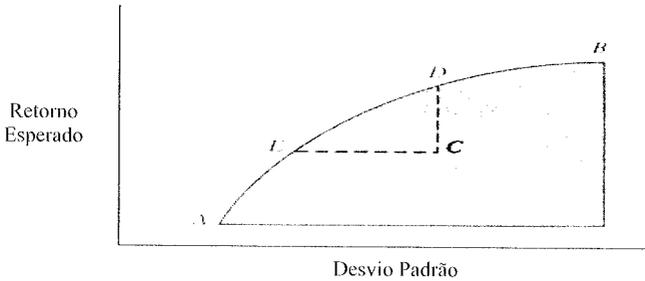
Investidores racionais actuam no mercado mantendo Portfólios eficientes – isto é, os que estão na linha e não abaixo dela. A selecção de um determinado Portfólio por parte de um investidor individual na fronteira de eficiência depende do seu grau de aversão ao risco. Um investidor que seja muito averso ao risco irá optar por um Portfólio no início do segmento, contrariamente a um investidor não averso ao risco que optará por um Portfólio que se situará na parte superior da fronteira.

Pode-se afirmar que a selecção depende da aversão ao risco por parte do investidor, que pode ser caracterizado pela natureza da sua função de utilidade de risco-rendimento.

---

<sup>1</sup> “Portfolio Management”; James L. Farrel, Jr.; McGraw-Hill International Editions; pag. 19

Gráfico n.º 1 – A fronteira de Eficiência



Em face daquilo que já foi referido, a determinação de uma carteira eficiente, segundo o modelo de Markowitz, exige a maximização do retorno face a um grau de risco<sup>2</sup> sujeito a duas condições:

$$\max E(R_c) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i) \quad (1)$$

sujeito a

$$\sigma^2(R_c) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_j$$

e

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$x_i, x_j \geq 0, i, j = 1 \dots N$$

aonde:

$E(R_c)$  - valor esperado do retorno de um carteira;

$E(R_i)$  - valor esperado do retorno de um dado título  $i$ ;

$\sigma^2(R_c)$  - variância associada ao retorno da carteira;

$\sigma_j$  - covariância entre os retornos do título  $i$  e o título  $j$

$x_i$  - proporção (em termos percentuais) do investimento num dado título  $i$ .

<sup>2</sup> Harry Markowitz, "Portfolio Selection", The Journal of Finance, 1952, vol. 7 000

Em alternativa à visão do retorno, podemos proceder à determinação de uma carteira eficiente através do requisito da minimização do risco para um dado retorno,

$$\min \sigma^2(R_c) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2)$$

sujeito a

$$E(R_c) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i) = K$$

e

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$x_i, x_j \geq 0, i, j = 1 \dots N$$

aonde:

$E(R_c)$  - valor esperado do retorno de um carteira;

$E(R_i)$  - valor esperado do retorno de um dado título  $i$ ;

$\sigma^2(R_c)$  - variância associada ao retorno da carteira;

$\sigma_{ij}$  - covariância entre os retornos do título  $i$  e o título  $j$

$x_i$  - proporção (em termos percentuais) do investimento num dado título  $i$ .

Obtém-se a carteira de variância mínima através da solução do segundo problema (2), em que a carteira é composta pelas combinações de títulos que para um determinado retorno têm associado o menor risco, enquanto que da solução óptima do primeiro problema (1) fazem parte os títulos com o maior retorno dado um certo nível de risco. Em qualquer um dos casos a variável de decisão é a percentagem  $x_i$  a investir no título  $i$ .

## **2.2. Investimento/Retorno associado a um Portfolio**

Qualquer investimento é função do valor presente do retorno esperado associado a um investimento. Podemos ter várias tipologias de

investimentos: instrumentos de débito, acções comuns, opções, futuros, investimentos imobiliários e outros instrumentos. Como o retorno será recebido num tempo futuro, torna-se necessário proceder à sua actualização para o momento presente de forma a se conseguir determinar um valor actual ou preço de equilíbrio para o investimento. Assumindo que o período considerado será de um ano, é possível ilustrar o processo da seguinte forma:

$$P_0 = \frac{\text{Cash flow} + P_1}{(1 + k)} \quad (3)$$

$P_0$  – cotação ou preço de um título no momento zero;

$P_1$  – cotação ou preço de um título no momento um;

$k$  – designada de taxa de desconto ou actualização, taxa de custo do capital.

A fórmula indica que o valor actual  $P_0$  é o valor do retorno recebido no final de um período de tempo mais o preço esperado no fim do período  $P_1$ , descontado pela taxa  $k$ . Note-se que o valor actual é uma relação entre o retorno ou cash flow, e o preço esperado no futuro. O preço actual será tão alto/baixo quanto mais elevado/baixo for o cash flow e o preço esperado no futuro. Por outro lado, o valor actual é inversamente relacionado com a taxa de desconto  $k$ , logo o valor actual será mais baixo/alto se a taxa de desconto for mais alta/baixa. A taxa de desconto  $k$ , é na maior parte das ocasiões designada de taxa de custo de capital, ou de taxa de custo médio ponderado do capital, precisamente em função das fontes de financiamento utilizadas.

A taxa de custo do capital pode ser também referida como retorno desejado – *required return* –, para o aforrador e será composta por dois elementos: retorno sem risco e prémio de risco.

O retorno sem risco é definido como o retorno que compreende o retorno real e um prémio de inflação. O retorno real é a componente básica da compensação do investimento realizado, requerido em virtude do agente não o poder dispendir em consumo corrente, tratando-se, portanto de uma compensação por aguardar ou diferir no tempo o seu consumo. O prémio para compensar a inflação será tanto mais alto/baixo quanto a inflação esperada for mais alta/baixa.

O prémio de risco tem quatro componentes significativas ou mais

relevantes: o risco da taxa de juro, o risco do poder de compra, o risco do negócio e o risco financeiro.

Assim, o prémio, que se traduz numa taxa de retorno que o investidor requer para compensar o risco que está disposto a suportar, é função da exposição ao risco que o investimento está sujeito.

Trabalhando a última equação, pode-se voltar a escrevê-la em ordem à taxa de custo do capital -  $k$ . Desta forma, a taxa de custo do capital aparece como sendo função da taxa de retorno esperado pelos investidores.

$$k = \frac{\text{Cash flow} + (P_1 - P_0)}{P_0} \quad (4)$$

Esta equação indica que a taxa de custo de capital, está directamente relacionado com o *cash flow* e com cotação esperada no fim do período. Quando se espera que estes dois componentes sejam altos/baixos, a taxa de custo de capital será alta/baixa. Por outro lado, a equação indica que quando o preço actual é mais baixo/alto a taxa de custo de capital será mais alta/baixa. As mudanças nos preços correntes provocam adaptações na taxa de retorno esperado pelos investidores, via taxa de inflação, através do correspondente impacto no retorno real.

É também possível utilizar esta equação para calcular o ganho em termos de taxa de retorno de um título durante um período passado (*realized return*), só que desta vez a fórmula terá como dados valores passados do cash flow e um preço actual comparado com um período passado, em vez de valores esperados.

Para calcular a taxa de retorno de, por exemplo, uma acção, o processo deve ser realizado através do retorno já recebido, que consiste no correspondente dividendo e no ganho do capital, ou mais valia, que é uma percentagem de variação do preço num período de tempo.

### 2.3. A Quantificação do Risco

Para determinar a taxa de retorno, é também importante quantificar o risco ou a incerteza que poderá estar associada ao rendimento, ou retorno. A variância do retorno e o desvio padrão são estatísticas possíveis da sua medida. Estas estatísticas medem a extensão da variação da média do retorno em determinado período, em relação aos pontos da série.

Variações extensas da média podem indicar uma grande incerteza do retorno esperado, correspondendo a uma dispersão de pontos possíveis.

### 2.3.1. Risco no Contexto de um Portfolio

Enquanto o desvio padrão e a variância do retorno medem o risco inerente a um título, há a necessidade de quantificar e considerar o risco num contexto de um Portfolio de títulos. O risco de um Portfolio irá depender da proporção de um título face aos restantes e a sua contribuição para o risco total do Portfolio, ou seja depende do peso relativo de cada título no Portfolio constituído.

A covariância é a medida estatística do risco de um título face a outros num Portfolio de títulos.

Se analisarmos dois Portfolios constituídos por títulos com iguais ponderações, podemos ter:

*Covariância negativa* – os desvios em média dos títulos considerados são opostos, o retorno dos títulos move-se de forma contrária um em relação ao outro;

*Covariância positiva* – os desvios do retorno dos títulos considerados em relação à média são sempre na mesma direcção;

*Covariância de baixo valor ou nula* – é um caso intermédio em que há períodos em que os desvios são opostos, mas que também há períodos em que eles caminham na mesma direcção, podendo neste caso os desvios anularem-se.

Por vezes, torna-se difícil de interpretar a covariância e a variância. Para facilitar, é usual padronizar a co-variância – divide-se a covariância entre dois títulos pelo produto do desvio padrão de cada título – produzindo uma variável com as mesmas características da covariância, mas com uma escala de  $-1$  a  $+1$ , que o autor do livro “*Portfolio Management*” designa de correlação de co-eficiência.

A variância ou risco de um Portfolio é calculada simplesmente, através de uma média dos pesos ponderados das variâncias dos títulos individuais no Portfolio. É também necessário considerar a relação entre cada título no Portfolio e todos os outros títulos como forma de extrapolação da covariância relativa ao retorno. Por outras palavras, a variância de um Portfolio é a soma dos pesos das variâncias de cada título individualizado mais duas vezes a covariância entre dois títulos. Pode-se utilizar esta expressão para examinar o efeito no risco do Port-

folio ao adicionar títulos com diferentes características ou impactos na covariância.

### **2.3.2. O Efeito da Diversificação**

A covariância é igual ao coeficiente de correlação entre dois títulos vezes o produto do desvio padrão de cada título. Se o desvio padrão se mantiver constante, pode-se dizer que quanto maior/menor for a correlação entre dois títulos, mais elevada/baixa será a covariância e mais alto/baixo será o risco do Portfolio.

A adição progressiva de títulos, especialmente os que têm uma baixa covariância, deverá ser um objectivo na construção de Portfolios, excepto no caso em que a correlação é +1, pois aí o risco do Portfolio mantém-se inalterado. Nos outros casos, o risco do Portfolio diminui.

Bastante importante na análise de um processo de diversificação é a correlação entre os títulos relativamente ao seu impacto no risco do Portfolio. Há então necessidade de estudar o coeficiente de correlação, que é uma medida da extensão e cujos valores variam entre -1 e +1 tendo com ponto central o zero.

O coeficiente de correlação de +1 indica uma correlação linear perfeitamente positiva entre dois títulos. Isto significa que se houver informações positivas relacionadas com um dos títulos as expectativas relacionadas com o outro título aumentam. O coeficiente de correlação -1 indica uma correlação linear perfeitamente negativa entre dois títulos. Significa que se houver uma informação que melhore as expectativas em relação a um dos títulos, as expectativas relacionadas com o outro título diminuirão. Se o coeficiente de correlação for zero, isso significa que os dois títulos são completamente independentes e qualquer mudança no comportamento ou expectativas de um em nada influenciará o outro.

Aspecto importante na diversificação é a adição de títulos a um Portfolio para a eliminação do risco. Neste caso, se houver um número suficiente de títulos com uma correlação zero (covariância 0) o investidor se recorrer a eles na construção de Portfolios pode tornar o risco subjacente ao seu investimento muito pequeno.

Este facto pode ser ilustrado empiricamente através do estudo das fórmulas da variância associadas a um Portfolio. Em primeiro lugar note-se que a variância do retorno associado a um Portfolio pode ser

escrita de acordo com a fórmula cinco. Conclui-se por aqui que a variância de um Portfólio é uma média ponderada relativamente à variância de cada título, mais a covariância entre cada título e os restantes no Portfólio. Ora, se os títulos não forem correlacionados, o segundo termo é igual a zero. Se assumirmos por simplificação que somente os títulos com covariância zero estão disponíveis, bem como que cada título tem a mesma variância e que o montante investido em cada título é igual chegámos ao final da demonstração, mostrando-se claramente que quantos mais títulos forem adicionados ao Portfólio, mais baixo será o risco associado.

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^N W_i^2 \sigma^2(R_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \sigma_{ij} \quad (5)$$

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^N W_i^2 \sigma^2(R_i) \quad (6)$$

se

$$\sigma_{ij} = 0 \quad (7)$$

aonde

$R_p$  – taxa de retorno de um Portfólio, ou carteira de títulos;

$\sigma^2 R_i$  – variância associada ao título  $i$ ;

$W$  – peso, ou proporção de títulos  $i$  ou  $j$ ;

$\sigma_{ij}$  – covariância entre a taxa de retorno do título  $i$  e a taxa de retorno do título  $j$ .

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sigma^2(R_i) = \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{i=1}^N \sigma^2(R_i) \quad (8)$$

porque o investimento em cada título é igual, podemos retirar o somatório e dizer que a variância do Portfólio será uma média ponderada da variância dos títulos.

$$\sigma^2(R_p) = \frac{1}{N} \sigma^2(R_i) \quad (9)$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_i}{\sqrt{N}} \quad (10)$$

aonde  $\sigma_p$  é o desvio padrão do Portfolio e  $\sigma_i$  o desvio padrão do título  $i$ , isto relativamente a um espaço concreto e limitado.

Esta matéria é primordial para algumas instituições, como por exemplo, as instituições bancárias e companhias de seguros, sobretudo para análise dos fundos de investimento que têm disponíveis no mercado. É por esta razão que as companhias de seguros tentam ter o maior número de apólices e alargam constantemente o grau de cobertura delas.

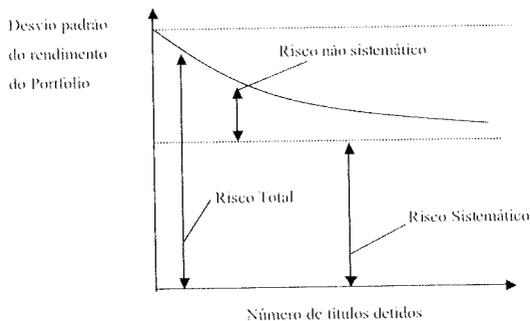
#### 2.4. Risco Sistemático e o Risco Não Sistemático (ou Risco Diversificado)

A noção de risco sistemático surge no contexto em que afecta todos os títulos e não pode ser posto de parte por qualquer efeito de diversificação, temos como exemplo o risco do mercado. Por outro lado, o risco diversificado ou não sistemático não é subjacente ao mercado, mas sim é algo subjacente aos títulos propriamente ditos.

Um pequeno Portfolio, de uma ou duas acções, pode ter um elevado risco diversificado ou não sistemático, enquanto que um grande Portfolio pode ter um risco diversificado, ou não sistemático bastante pequeno. Tal facto é possível porque acções de investimento que incluam uma estratégia de diversificação, permitem a redução deste tipo de risco.

Um fundo perfeitamente diversificado – um *index fund* – reflectirá apenas uma relação mercado-risco, correspondente ao primeiro tipo de risco explicado.

Gráfico n.º 2 – Risco sistemático vs risco não sistemático



O gráfico<sup>3</sup> n.º 2 demonstra que o risco total de um Portfólio diminui à medida que o o número de títulos incluídos nesse Portfólio aumenta. A diversificação, via adição de títulos, tende a resultar apenas na diminuição do risco não sistemático. A restante componente reflecte o facto que o rendimento de todos os títulos depender do grau de performance, ou desempenho do mercado. Consequentemente, o rendimento de um Portfólio, bem diversificado, está altamente correlacionado com o mercado, e a sua variação ou incerteza é basicamente a incerteza do mercado como um todo. Os investidores estão expostos à incerteza do comportamento do mercado independentemente da quantidade de acções que tenham.

Esta análise tem implicações tanto no tipo de risco que pode ser alterado através dos diferentes conjuntos de investimentos possíveis existentes no mercado, como também como uma medida relevante do risco nos títulos e nos Portfólios. Visto que a diversificação fornece um processo mais fácil de reduzir, ou mesmo eliminar o risco não sistemático de um Portfólio, parece razoável dizer que o mercado não é o agente principal do processo de modificação do risco, transitando este, para o conjunto de opções de investimento do investidor. Apenas será o principal ponto relativamente ao risco sistemático, dado que este não pode ser eliminado pelos investidores, por qualquer tipo de opção que tomem.

Interessa finalmente, retirar conclusões sobre a relação que existe entre o risco e retorno e as mudanças nas ponderações de cada título.

A relação entre o risco e retorno, varia de acordo com as ponderações utilizadas para cada um dos títulos incluídos no Portfólio.

Assim, se a correlação entre os títulos se situar entre  $] 0, +1[$ , a diversificação torna-se mais aconselhável e o risco total é reduzido. Por outro lado, se formos capazes de encontrar títulos com uma correlação linear perfeitamente negativa  $] -1, 0[$ , será possível construir um Portfólio com uma variância zero.

#### **2.4.1 – A Venda a Descoberto (“Short Selling”)**

Sobre as ponderações de cada título num Portfólio, há a referir que o peso dos títulos num Portfólio assumia-se até aqui como sendo positivo, ou pelo menos não menor do que zero. A venda a descoberto

---

<sup>3</sup> Ilustração gráfica generalizada

permitirá e validará esta última hipótese.

A optimização formal do problema, relativamente à diminuição do risco em Portfolios, é designada por “*nonnegativity constraint*” em títulos individuais face à operação que consiste em vender títulos a descoberto, tratando-se de uma das soluções preventivas do Portfolio. Esta operação carece de uma antecipada autorização institucional, pois vender a descoberto está restringido por regulamentação própria.

A maioria dos investidores geralmente não vendem a descoberto e na totalidade do mercado este é um hábito de uma pequena percentagem da actividade, pois implica acções específicas a verificar antes da operação de compensação. No entanto, algumas estratégias de investimento destacam a venda a descoberto como uma significativa componente do processo, pois este processo deverá permitir ao investidor desenvolver uma melhor combinação risco-retorno.

O princípio de vender a descoberto é tanto mais benéfico, com menor risco subjacente, quanto mais alta for a correlação entre os títulos.

### **3. MODELOS TEÓRICOS - INPUTS NECESSÁRIOS**

Para utilizar de forma plena o modelo de construção de Portfolios de Markowitz, apresentado na secção anterior, o investidor tem de obter estimativas dos retornos, das variâncias e covariâncias dos retornos para os títulos no universo em causa.

Para estimar os retornos esperados e a variância de dois Portfolios de acções, cinco estimativas são necessárias: o retorno esperado para cada Portfolio, a variância do retorno para cada Portfolio e a covariância entre os dois Portfolios.

Recorrendo ao modelo de Markowitz, torna-se difícil analisar determinados processos que compreendem elevado números de títulos, sobretudo devido ao grande número de passos a dar para o cálculo e input das estimativas do modelo.

Por exemplo, para uma análise a um universo de 200 acções seriam necessárias 20.300 estimativas. Para além disso, a coordenação do processo de recolha de informação apresenta também dificuldades, sobretudo quando trabalhámos com as variâncias e as covariâncias.

Os departamentos de desenvolvimento e análise de títulos estão organizados de tal forma que são apenas capazes de fazer as tarefas para as quais estão designados, não sendo capazes de relacionar-se ou levar

a cabo acções profundas com outros departamentos, devido ao trabalho extenso, subjacente à recolha da informação necessária para o trabalho atrás descrito. Normalmente, trata-se de um departamento cuja acção está limitada à sua área de trabalho.

### 3.1. “Asset allocation”

O modelo da variância e covariância de Markowitz encontrou pouca aplicação prática no estudo e avaliação de um grande universo de títulos. Todavia não deixou de ser aplicado regularmente, dentro das suas limitações e com uma grande taxa de sucesso no campo prático de “*asset allocation*”. O objectivo de uma “*asset allocation*” é criar um tipo de estratégia de investimentos em que o montante monetário aplicado é repartido por grandes categorias de activos, como sejam depósitos, obrigações nacionais e estrangeiras, acções nacionais e estrangeiras ou outros títulos imobiliários, com base nos retornos médios esperados em cada classe permitindo no total, um alto retorno e nível de risco aceitável para os investidores. Os gestores de Portfolios, especialmente aqueles que estão em instituições de investimentos, tendo como função gerir os planos de pensões públicas ou cooperativas e fundações usam a metodologia “*asset allocation*” extensivamente para desenvolver o mais apropriado mix de activos, procurando assim uma melhor rentabilização do plano de investimentos. O objectivo do plano é assim perfeitamente consistente com o conceito do Portfolio eficiente de Markowitz.

Para além disto, o significado da variância de um Portfolio, estudado anteriormente, pode ser usado neste contexto porque o problema do desenvolvimento dos respectivos inputs, ou títulos a incorporar é contornável. A razão porque isto pode acontecer, é porque o número da classe de activos que pode ser incluído na análise é limitado por natureza.

Quando se procede à determinação da composição através de uma “*asset allocation*”, na maior parte dos casos as organizações lidam apenas com três classes de activos:

- Acções;
- Obrigações de longo prazo;
- Instrumentos de mercado monetário.

Limitando-se a gestor de Portfolios a trabalhar com as referidas

três classes são necessárias três estimativas de rendimento e variâncias associadas, assim como três estimativas da correlação entre as classes de activos. É ainda possível às organizações, ou instituições monetárias, expandir a sua análise de forma a incluir câmbios internacionais e negócios imobiliários, mas virtualmente nenhuma irá considerar, por regra, mais do que oito ou dez classes de activos. Para uma análise de oito classes de activos seria necessário oito estimativas de retorno e suas variâncias e vinte e oito estimativas de correlação, facto que torna este processo, uma tarefa um pouco complicada.

Relativamente à informação histórica sobre retornos, variâncias e correlação para estas classes de activos é possível aceder a algum facto que nos possibilita uma observação e consequentemente uma análise mais simplificada, sobre a perspectiva do seu comportamento ou tendência. Este facto ajuda os investigadores a desenvolver formas de modelar e de projectar rendimentos e características de riscos de activos para o futuro, com base em dados passados e não efectuar projecções ex-post.

### **3.2. Características da Relação Risco-Retorno de Classes de Activos**

Quando procedemos a investimentos por um certo e determinado período de tempo, torna-se bastante útil calcular retornos e quantificar o risco para as diversas classes de activos.

Este facto ajuda, em primeiro lugar, a avaliar o comportamento das diversas classes de activos sobre diferentes períodos económicos, mediante condições específicas e concretas.

Em segundo, o retorno medido, ou calculado, sobre períodos de tempo suficientemente longos, é representativo do retorno esperado pelos investidores, dado que é uma medida de aproximação à média do retorno esperado e que o horizonte temporal do investidor e das observações irá coincidir. Será, portanto, útil na definição de indicadores de avaliação, assim como para calcular os retornos futuros. Finalmente, os valores encontrados para o retorno efectivo e a medida do risco, podem ser utilizados para comparar o comportamento entre as diferentes classes de activos.

Alguns investigadores, como Ibbotson e Sinquefeld, calcularam o retorno efectivo e o desvio padrão do retorno ao longo de longos perí-

dos, para quatro classes de activos:

- Acções;
- Obrigações de empresas;
- Títulos do Tesouro;
- e Obrigações do Estado de longo prazo.

Com esta análise não queria apenas estudar o comportamento dos títulos pelos diversos períodos de tempo, mas também observar como os diferentes retornos de cada classe diferiam de acordo com o risco de cada classe. Assim, poderiam determinar o retorno real de cada uma das diversas classes pelo período em análise.

Para determinar o retorno real nos activos, Ibbotson e Sinquefeld utilizaram as correspondentes taxas de inflação e compararam-nas com o retorno nominal dos activos. Uma forma de visualizar a relação risco-retorno entre activos é estabelecer uma hierarquia de risco e de retorno e compará-la com as diversas classes de activos.

Por exemplo, os Títulos do Tesouro consideram-se o investimento menos arriscado de todas as classes de activos, podendo-se comparar o retorno nesta classe de activos com a inflação para determinar o retorno real. Os outros títulos têm um maior risco do que os títulos do Tesouro, existindo um retorno adicional, que visa compensar este risco, designado como “*liquidity premium*” ( prémio de liquidez ).

Por outro lado, podemos encontrar um rendimento extra comparativamente com outros títulos, designado por “*default premium*”, prémio por incumprimento. Finalmente, as acções podem ser comparadas com o activo menos arriscado (os títulos do Estado) para determinar um prémio de risco por investir na mais arriscada classe de activos.

#### **4. A CONSTRUÇÃO DA FRONTEIRA DE EFICIÊNCIA**

Uma ilustração de uma aplicação de uma “*asset allocation*”, pode ser efectuada através da criação de uma fronteira de eficiência de uma ou mais classe de activos. Para isso, considera-se as três classes de activos mais relevantes consideradas anteriormente, acções, obrigações de longo prazo e instrumentos de mercados monetários. Estes são os activos mais usados pelos gestores de Portfolios e investidores como principais classes de activos base em qualquer fundo de investimento alargando-se posteriormente a sub-classes.

#### 4.1. Aversão ao Risco

Os investidores seleccionarão Portfolios da fronteira de eficiência de acordo com o seu grau de aversão ao risco. Os investidores com um alto grau de aversão ao risco irão escolher um Portfolio com pouco risco subjacente, medido por um baixo valor para a variância, ou desvio padrão, do retorno esperado. Por outro lado, investidores com uma alta tolerância ao risco optam por Portfolios com um mais alto retorno esperado, embora a estes esteja associado a uma variância ou desvio padrão mais elevada do retorno esperado.

Assim, a selecção e escolha de um Portfolio terá como critério a maximização da utilidade esperada pelo investidor, ou seja, toda a selecção feita pelo investidor terá por base o que ele espera da relação que existe entre o risco e o retorno e aquilo que constitui utilidade para ele.

As análises económicas clássicas, indicam através de curvas de indiferença (representativas da utilidade) a magnitude e qual o significado da variância medida na transacção entre o risco e o retorno.

Ao longo das curvas de indiferença o investidor é indiferente à relação entre risco-retorno. Desde que as curvas sejam conhecidas, o melhor Portfolio a escolher é um da fronteira de eficiência que seja tangente à curva de indiferença.

No entanto, enquanto a base conceptual é clara, a aplicação prática torna-se bem mais difícil, visto que é virtualmente impossível criar um padrão de curvas de indiferença de um investidor e ainda mais difícil é criar uma aproximação para a relação entre o risco e retorno. Foi entretanto desenvolvida uma aproximação, capaz de dar uma diferente perspectiva de resolução do problema, sendo conhecida e designada por aproximação ao “*certainty equivalent return*” (retorno equivalente certo).

Pode-se descrever o processo de aproximação da seguinte forma. Primeiro, assume-se que a aversão ao risco por parte do investidor irá penalizar a taxa de retorno esperada de um Portfolio de acordo com a percentagem do risco envolvido. Quanto menor o risco que o investidor persegue, maior será a penalização, pois menor será a amplitude da variação do retorno esperado. Pode-se formalizar a noção do sistema da penalização do risco, assumindo que cada investidor estará disposto a suportar um ranking de utilidade para aceitar com Portfolios de investimentos, baseados no retorno e no risco esperados nesses Portfolios. Aos

Portfolios está associada maior utilidade, quanto maior for o retorno esperado e menor valor para o risco associado. A função para obter um Portfolio com um retorno esperado  $E(R)$  e uma variância associada de retorno  $F^2$  com a seguinte utilidade, pode ser escrita da seguinte forma:

$$U = E(R) - \frac{1}{2} A \Phi^2 \quad (11)$$

onde  $U$  é o valor da utilidade e  $A$  é o índice da aversão do investidor face ao risco.

A equação é consistente com a noção de que a utilidade aumenta pelo retorno esperado e diminui pelo risco, pelo que existe uma relação positiva com o retorno e negativa com o risco. A extensão através da qual a variância diminui a utilidade, depende de  $A$  (índice de aversão do investidor face ao risco). Note-se que no caso do investidor ser indiferente ao risco, o coeficiente  $A$  será zero e a utilidade será igual ao retorno esperado do Portfolio. Para o caso mais significativo de aversão ao risco, o valor de  $A$ , assim como a penalidade aumentaria de acordo com o aumento da aversão ao risco. Note-se que no limite, a utilidade dada por um Portfolio sem risco, é simplesmente a taxa de retorno num Portfolio, visto que não há penalização associada para o risco (a variância é zero).

Pode-se comparar valores da utilidade com taxas de retorno proporcionadas em investimentos sem risco ao proceder à escolha entre Portfolios com risco e sem risco associado, interpretando-se o valor do retorno do Portfolio como uma taxa de retorno equivalente certo para um investidor. Alternativa à taxa de equivalente certo de um Portfolio é a taxa que um investimento sem risco precisa de oferecer para ser considerada igualmente atractiva relativamente a um Portfolio com risco.

Devido à dificuldade de estabelecer um parâmetro de medida de aversão ao risco para um investidor, a aproximação via o equivalente certo, revelou-se uma aplicação prática muito limitada por forma a permitir a um investidor seleccionar um Portfolio da fronteira de eficiência. No entanto, é útil na dedução da aversão ao risco de um investidor quando se sabe o Portfolio que ele tem.

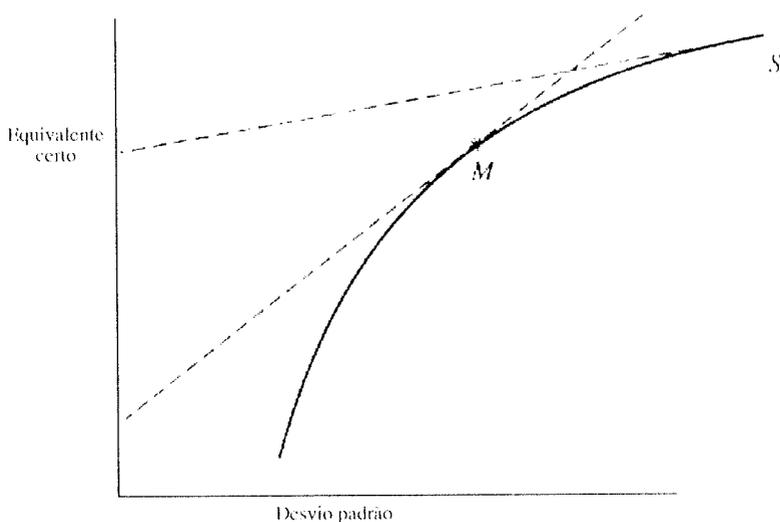
Pode-se exemplificar a utilização desta forma de aproximação ao equivalente certo para deduzir a aversão ao risco de um investidor que detenha um Portfolio equilibrado através de um mix de acções e obri-

gações na proporção de 60/40, mix este que aparece em muitos fundos de investimento.

Este método é ilustrado pelo gráfico n.º 3<sup>4</sup> que mostra uma fronteira de eficiência relativamente a dois Portfolios:

- um Portfolio apenas constituído por acções (S)
- um Portfolio com um mix de 60% acções e 40% obrigações (M).

*Gráfico n.º 3 – Exemplificação gráfica do método do equivalente certo*



Para se proceder à visualização do grau de aversão ao risco basta simplesmente traçar uma linha tangente no ponto do Portfolio escolhida e presente na fronteira de eficiência e estender esta linha até ao eixo vertical. O ponto de tangência representa a relação entre risco-retorno do Portfolio, enquanto o ponto de intersecção com o eixo vertical representa a taxa de retorno equivalente certo.

Note-se que a linha tangente no Portfolio S intersecta o eixo vertical num nível relativamente elevado, enquanto que a linha tangente no Portfolio M intersecta-o num nível mais baixo. Espera-se que o Portfolio constituído por acções, que marca o ponto mais elevado na frontei-

<sup>4</sup> James L. Farrel, Jr, "*Portfolio Management*"; McGraw-Hill International Editions; pag. 43

ra de eficiência, requeira um maior equivalente certo para investidores com um baixo grau de aversão ao risco. De uma forma complementar, a baixa intersecção ocorrida na linha do Portfolio M, resulta de uma diminuição da taxa de retorno equivalente certo para investidores com um elevado grau de aversão ao risco. Após deduzir a relação do risco-retorno, é possível determinar as mudanças que se pode fazer na composição de um Portfolio para se manter esta relação.

#### 4.2. Expandir as Classes do Activo

Como se verificou anteriormente, a metodologia da “*asset allocation*” tem por base três grandes classes de activos: acções, obrigações de longo prazo e instrumentos de mercados monetários. Esta composição não se verifica apenas pela importância ou pela familiaridade entre as três classes, mas também pela possível viabilização e disponibilização da informação com as principais características que compõem a relação risco-retorno.

Recentemente, os investidores alargaram os seus investimentos, incluindo outras classes de activos na suas “*asset allocations*”, para além dos referidos. Este fenómeno é uma clara extensão dos princípios da teoria dos Portfolios, onde um maior universo de títulos a ter em consideração torna possível um aumento do potencial de oportunidades para desenvolver um processo mais correcto de diversificação.

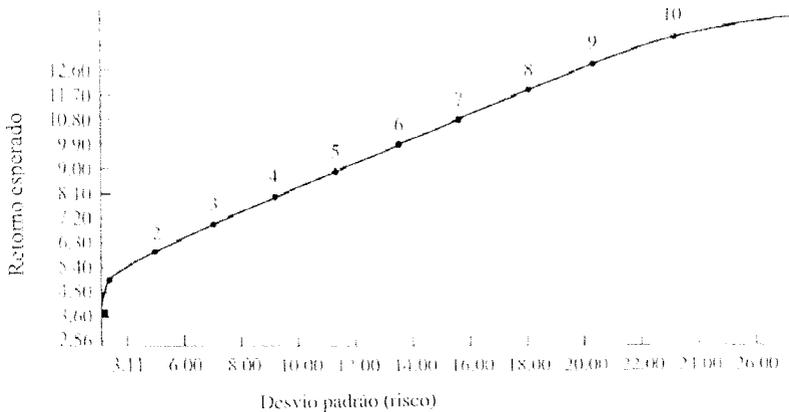
Acrescentar novas classes de activos, especialmente aquelas que têm características favoráveis de covariância, tem-se tornado um objectivo de mais investidores e de gestores de Portfolios. Algumas das classes de activos que os investidores têm adicionado à “*asset allocations*” incluem obrigações para além das de longo prazo e títulos imobiliários internacionais. Outras classes de activos que se poderiam considerar incluem ouro, capital de risco e outros bens económicos. O desenvolvimento da informação nestas classes de activos tem tornado o crescimento do universo dos activos em consideração nas acções de investimento, um objectivo cada vez mais sério para que faça parte do processo da “*asset allocation*”.

No passado, a maioria dos planos estabelecidos pelos investidores não davam grande importância às acções internacionais (geralmente menos de 5 %) no mix de activos. Recentemente, com a liberalização da circulação de capitais e com os princípios de globalização a apare-

ceremcada vez mais fortes começou a aparecer um desenvolvimento no sentido do crescimento da exposição ao plano de acções internacionais.

Esta tendência está a ser aceite devido à diversificação de oportunidades oferecidas pelas acções internacionais bem como um potencial crescimento oferecido pelos países seleccionados.

Gráfico n.º 4 – A fronteira de eficiência com títulos internacionais



O gráfico n.º 4<sup>5</sup> mostra a fronteira de eficiência de Portfolios, incluindo acções internacionais. O desenho acaba por ser idêntico até aquela que tem sido visto. Note-se que as acções internacionais permitem que para níveis elevados de retorno, um alto retorno nas acções será alcançável com um menor risco devido à relativa baixa correlação das acções internacionais com outros activos.

## 5. CONCLUSÃO

A teoria associada à criação de Portfolios, de acordo com o modelo de Markowitz, dá uma linha de trabalho conceptual assim como uma aproximação analítica que tem aplicação prática directa. Por exemplo, foi visto que a diversificação é um ponto fulcral na gestão de um Portfo-

<sup>5</sup> James L. Farrel, Jr; "Portfolio Management"; McGraw-Hill International Editions; pag. 45

lio. Isto significa que analiticamente, há a referir que adicionar títulos a um Portfolio pode resultar na redução do risco sem perda no retorno, tendo esta relação operacional aplicações consistentes de utilidade na prática. O princípio da diversificação é também um princípio que nos dá os fundamentos base para os modelos de equilíbrio do mercado. Finalmente, o modelo de Markowitz tem directa aplicação prática no desenvolvimento de uma “*asset allocation*” assim como fornece alguns princípios analíticos para um investimento à escala global.

**BIBLIOGRAFIA**

BRIGHAM, Eugene F. e Louis C. Gapenski, (1994), *Financial Management*, The Dryden Press.

CAMPBELL, John Y., Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay, (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.

CHAN, Louis K.C., (1997), “The Risk and Return from Factors”, *National Bureau of Economic Research, Inc.*

COPELAND, Thomas E. e J, Fred Weston, (1992), *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley Publishing Company.

DAMODARAN, Aswath, (1992), *Applied Corporate Finance*, John Wiley & Sons, Wiley Finance Editions.

ELTON, Edwin J. e Martin J. Gruber, (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Wiley Finance Editions.

ENGLE, Robert F. e Joe Lange, (1997), “Measuring, Forecasting and Explaining Time Varying Liquidity in the Stock Market”, *National Bureau of Economic Research, Inc.*

FAMA E EUGENE FRENCH, (1991) “Efficient Capital Markets II”, *Journal of Finance*, Vol.46, pp. 1575-1614.

FAMA E EUGENE FRENCH, (1992), “The Cross-Section of Expected Returns”, *Journal of Finance*, Vol. 47, pp. 427-465.

FARREL, James L. Jr., (1997), *Portfolio Management*, McGraw-Hill International Editions.

HAUGEN, Robert A., (1997), *Modern Investment Theory*, Prentice Hall International Editions.

MARKOWITZ, Harry, (1952), “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77-91.

MILLER, Merton H. e Franco Modigliani, (1961), “Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares”, *Journal of Business*, Vol. 34, Nº4, pp. 411-433.

SCHWERT, G. William e Paul J. Seguin, (1990), “Heteroskedasticity in Stock Returns”, *Journal of Finance*, Vol. 45, pp. 1129-1155.

TIMMERMANN, Allan, (1992), “A Model of Information Aggregation with a Simultaneous Determination of Stock Prices and Dividends” *Birkbeck College – University of London*, Working Paper 1/92.

VINCE, Ralph, (1990), *Portfolio Management Formulas*, John Wiley & Sons, Wiley Finance Editions.