

**ESTUDO COMPARATIVO DOS MODELOS
DE MARKOWITZ E SHARPE.
PRINCIPAIS UTILIDADES E/OU CONTRIBUTOS
NO CONTEXTO DA MODERNA TEORIA FINANCEIRA**

José Veiga Pereira

ABSTRACT

A teoria da carteira de Harry Markowitz, originalmente publicada em 1952 no Journal of Finance, "Portfolio Selection", desenvolveu um método de solução geral do problema da estrutura das carteiras, que engloba o tratamento quantificado do risco. Propõe a determinação de um conjunto de carteiras eficientes empregando unicamente os conceitos de média para a rentabilidade que se espera obter e de variância (ou desvio padrão) para a incerteza associada a essa rentabilidade, e daí a denominação de média-variância à análise de Markowitz. Chamou também a atenção para a diversificação das carteiras, mostrando como um investidor pode reduzir o desvio padrão da rentabilidade da carteira através da escolha de acções cujas variações não sejam exactamente paralelas.

A abordagem de W. Sharpe (1963) sugeriu uma metodologia simplificada, baseada no modelo de Markowitz em que a matriz das covariâncias é substituída por uma matriz diagonal.

Comparando as fronteiras eficientes obtidas, utilizando a programação quadrática e o método simplificado de Sharpe, conseguiram-se resultados aproximados (Cohen e Pogue – 1970).

1. INTRODUÇÃO.

Até aos anos 50, o paradigma teórico dominante na valoração de activos financeiros aceitava a heterogeneidade das expectativas – eram

modelos expectacionais – e valorizava a investigação sobre as variáveis determinantes do valor fundamental ou valor teórico justo. As carteiras de investimentos deviam ser formadas por posições que o investidor identificasse como estando subavaliadas pelo mercado, e que por isso apresentariam um maior potencial de valorização.

Com as Teorias Modernas de Gestão de Carteiras, assiste-se a uma alteração do paradigma. Perante as dificuldades em desenvolver modelos baseados na avaliação do valor fundamental que fossem operacionais e empiricamente validados, constata-se que a derivação de modelos de avaliação baseados na hipótese de os mercados financeiros serem eficientes permite desenvolvimentos teóricos mais ricos. O novo paradigma assume, em maior ou menor grau, que as cotações de mercado já reflectem a melhor expectativa possível sobre o valor fundamental dos títulos, e que a gestão de carteiras de investimento deve basear-se na tomada de posições diversificadas, minimizadoras do risco, e não na tentativa de detecção de imperfeições nas cotações de mercado.

A teoria da carteira parte duma metodologia assente na fundamentação matemática e estatística, por forma a permitir aos investidores tomarem as suas decisões com base em critérios objectivos que conduzissem à minimização do risco assumido nos seus investimentos ou, em alternativa, à maximização dos rendimentos esperados. Portanto com base no “trade-off” entre risco e rendibilidade. Este instrumento de análise permite definir, para cada nível de rendimento esperado, a composição da carteira que minimiza o risco que o investidor enfrenta. É claro que se está no campo das expectativas e que tanto o risco como o rendimento são definidos com base num valor esperado determinado a partir de observações históricas.

A principal contribuição do modelo introduzido por *Markowitz* em 1952 foi mostrar que a gestão de carteiras de investimentos deve ser feita tendo em conta a rendibilidade e o risco total da carteira de todos os investimentos detidos por um investidor, e não em função da rendibilidade e do risco de cada título, considerado isoladamente. *Markowitz* pôs em evidência os benefícios de uma estratégia de gestão de carteiras de investimento baseada na diversificação das posições tomadas, como forma de reduzir o risco total corrido pelo investidor, para um mesmo nível de taxa de retorno/rendibilidade esperada.

2. O FUNCIONAMENTO DO MODELO DE MARKOWITZ

2.1 O primeiro pressuposto necessário à derivação do modelo de selecção de carteiras de Markowitz é o da normalidade da função de distribuição de probabilidade das taxas de retorno esperadas para cada título. Como cada distribuição normal pode ser descrita por apenas dois parâmetros (a sua média e a sua variância), então as funções utilidade em que os investidores baseiam as suas decisões de investimento podem ser definidas apenas em termos desses dois parâmetros: a taxa de retorno esperada, correspondente à média da distribuição, e o nível de risco, medido pela sua variância (ou pelo desvio-padrão).

O conceito de taxa de retorno ou rendibilidade será a soma das mais-valias em capital e os dividendos em relação à cotação da acção no início do período:

$$R_t = (P_t - P_{t-1} + D_t) / P_{t-1}$$

A rendibilidade que se espera obter de um título (ou a sua esperança matemática) é que será uma variável aleatória de carácter subjectivo, cuja distribuição de probabilidade é conhecida¹.

Claro que a taxa de rendibilidade esperada dum título pode ser diferente da *performance* média conseguida por este título no passado.

O risco é materializado na variabilidade ou dispersão do seu rendimento e mede-se pelo desvio padrão ou pela variância. Ou seja, o risco dum investimento em valores mobiliários provém do facto de as expectativas de rendibilidade nem sempre se verificarem. A dispersão das rendibilidades em torno da rendibilidade média ou esperada traduz o risco da aplicação. Assim, uma maior variância representa um maior nível de risco do activo mas, ao mesmo tempo, representa uma maior probabilidade de se obterem maiores rendibilidades.

O desvio-padrão ou a variância constituem portanto uma medida cómoda dessa dispersão, e os investidores que procuram evitar o risco darão preferência às aplicações cuja variância seja fraca.

Vários estudos (*Solnik (1974), Altmanetal (1974)*) mostraram de um modo empírico que a volatilidade das variações das cotações dos títulos, e das carteiras, é relativamente estável. Pode-se, por isso, utili-

¹Doldán Tié, 3.7, Tórculo Edicións, 2000

zar uma medida de risco passado para avaliar o risco de uma aplicação actual.

No entanto, e relativamente à hipótese de normalidade, vários estudos têm mostrado que as taxas de retorno observadas *ex-post* nos mercados financeiros não seguem uma distribuição normal. Geralmente, as distribuições não são simétricas, mas “negatively skewed” : apresentam um maior número de observações à esquerda da média do que à sua direita. As distribuições observadas apresentam também um maior número de observações na vizinhança da média do que uma distribuição normal, e um maior número de observações muito afastadas da média (nas abas) do que uma distribuição normal, especialmente para o lado direito (as taxas de retorno da maioria dos activos financeiros são limitadas à esquerda, mas não à direita: variam entre -100% e $+\infty$).

Se as distribuições não são normais, então duas distribuições com a mesma média e variância, podem, na realidade, ser diferentes entre si, e por isso não serem equivalentes para um dado investidor. Por exemplo, um investidor pode preferir uma distribuição com poucas observações muito afastadas da média, do que outra (com igual média e variância) com abas muito mais gordas. No caso de não normalidade, a verdadeira função utilidade dos investidores poderá medir o risco com base não apenas na variância da distribuição: por exemplo, poderá valorar de forma diferente a possibilidade de ocorrência de taxas de retorno inferiores ou superiores à taxa de retorno esperada, ou dar maior importância à ocorrência de desvios acentuados mas raros em relação à taxa de retorno esperada do que a desvios de menor dimensão e mais frequentes, etc.

2.2 Mas, como observa *Fama*, a hipótese de normalidade permite um tratamento estatístico muito mais facilitado. Um bom modelo não pretende ser uma descrição exacta da realidade, mas sim uma descrição conveniente e que proporcione uma melhor aproximação da realidade do que os modelos concorrentes.

Assumindo que as funções distribuição de probabilidade das taxas de retorno esperadas para cada título são normais, *Markowitz* deriva as relações existentes entre a rendibilidade e o risco da carteira de investimento e a rendibilidade e o risco dos títulos individuais que a compõem:

– a taxa de retorno esperada da carteira ou portfólio (R_p) é igual à média das taxas de rentabilidade esperadas para os títulos que integram a carteira (R_i), ponderada pelos seus pesos relativos. Para n títulos, cada um com um peso na carteira total de w_i , ($\sum w_i = 1$), teremos:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

– porém, relativamente à variância, já o mesmo não se passa: a variância da carteira é inferior à média ponderada das variâncias dos títulos que a compõem, excepto no caso de as variações nas taxas de retorno dos títulos serem perfeitamente correlacionadas. A variância da carteira pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i R_j) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \text{Var}(R_i) + \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 2w_i w_j \text{Cov}(R_i R_j) \end{aligned}$$

A diversificação, constituindo carteiras compostas por diversos títulos com taxas de retorno esperadas não perfeitamente correlacionadas, permite obter um risco total para a carteira inferior à soma dos riscos individuais dos diversos títulos, sem contudo a taxa de retorno esperada para a carteira deixar de ser determinada pela soma dos rendimentos proporcionados por cada um dos títulos.

O princípio referido de que as variações de cotação dos diferentes títulos, que compõem a carteira, são em parte independentes, e terão tendência a compensar-se, logo, a reduzir o risco total pode ser facilmente compreendido.

3. DETERMINAÇÃO DA FRONTEIRA EFICIENTE

Partindo da análise das rendibilidades históricas dos títulos constrói-se uma matriz de variâncias e covariâncias que funciona como um dos pilares do modelo. Esta matriz mede a forma como, em termos históricos, os vários activos variam entre si. Assim, por exemplo, se a correlação entre dois activos é negativa significa que quando um sobe o

outro apresenta uma variação em sentido inverso que permite compensar parcial ou totalmente as perdas ou ganhos resultantes.

Calcular a rendibilidade esperada de uma carteira é relativamente simples pois basta considerar a média ponderada das rendibilidades esperadas para os títulos individuais. Já o cálculo do desvio padrão ou da variância da rendibilidade da carteira é mais complicado de calcular, como referimos anteriormente, porque depende do desvio padrão (ou variância) de cada título e da correlação existente entre cada par de títulos.

Markowitz mostra que é possível determinar a composição da carteira que minimiza o risco (mínima variância), para cada nível de taxa de retorno esperada, resolvendo o seguinte problema de optimização (cuja solução necessita do recurso a técnicas de programação quadrática):

O modelo tem como função objectiva o risco da carteira, medido pelos respectivos níveis de risco de cada activo e das suas covariâncias.

As carteiras eficientes serão as que minimizam o risco para uma dada rendibilidade esperada.

Matematicamente poderá ser formulado do seguinte modo:

$$\text{Min. } \sum_i \sum_j X_i X_j \sigma_{i,j}$$

$$\text{Com a condição } \sum_i X_i E(R_i) \geq E$$

$$\sum_i X_i = 1 \quad \text{e}$$

$$X_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

A função objectiva é uma forma quadrática, simétrica e semidefinida positiva e as condições são lineares.

Uma solução correspondente a $\sum_i X_i E(R_i) = E$ pode ser obtida pelo algoritmo da programação quadrática.

Teremos, tal como já referimos, de estimar a rendibilidade esperada e o desvio padrão (ou a variância) para cada título e também a correlação entre cada par de acções no total de $N(N+3)/2$ inputs de informação. Com recurso a um programa informático calculamos o

conjunto das carteiras eficientes. Este processo é realizado mediante a definição de determinadas restrições, como a impossibilidade de serem realizadas vendas a descoberto ou a necessidade de se aplicar todos os montantes disponíveis (o total do peso dos activos mobiliários tem de totalizar 1).

A fronteira eficiente será obtida, exactamente, por uma parametrização da esperança da rendibilidade. Este problema é muitas vezes formulado sob a forma matricial. Se existem n valores diferentes, haverá n proporções x que serão determinadas pela programação quadrática, e a função objectivo contém $n(n+1)/2$ termos. Por exemplo se temos $n=100$ títulos, a função objectivo contém 5050 termos ou se temos 500 títulos, a função objectivo contém 125250 termos.

Deste modo é possível obter composições de carteiras de risco mínimo para cada nível de rendimento indicado. Assim, por exemplo, um investidor que tivesse como objectivo um rendimento da sua carteira de x % teria que constituir a sua carteira com determinados pesos. Para rendimentos esperados superiores, o risco seria necessariamente superior dado que, o desvio-padrão (ou a variância) é uma medida da volatilidade e, como tal, é necessária para que se consigam rendibilidades mais elevadas.

O gráfico representa todas as carteiras que é possível formar, com diferentes combinações dos vários títulos existentes. Algumas dessas carteiras satisfazem o objectivo de minimização de risco para cada nível de taxa de retorno esperada, e constituem a fronteira eficiente. Muitas outras carteiras não satisfazem esse objectivo, e são representadas pelos pontos isolados, situados à direita da fronteira eficiente.

De acordo com as curvas de indiferença derivadas a partir da função de utilidade² da distribuição de probabilidade do valor futuro da sua carteira de investimentos, cada investidor irá seleccionar a carteira de investimentos representada pelo ponto da fronteira eficiente que permite atingir um nível mais elevado de utilidade, ou seja, que é tangente a uma curva de indiferença.

²O comportamento do investidor corresponde a uma função de utilidade dependente de dois parâmetros: $U=U(\mu_h, \sigma_h)$, cujas características de preferência pelo rendimento e

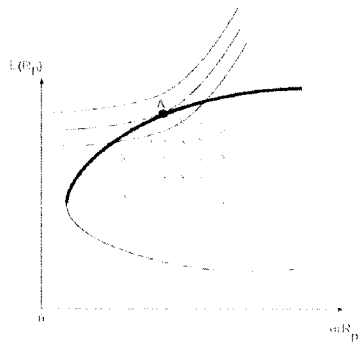
aversão ao risco exigem que $\frac{\partial U}{\partial \mu_h} > 0$ e $\frac{\partial U}{\partial \sigma_h} < 0$ Ver Doldan 'Tié, 3.7.

O investidor com as preferências consideradas no gráfico deverá escolher a carteira A. Porém, um investidor com preferências diferentes poderia escolher, racionalmente, outra carteira, desde que também situada na fronteira eficiente.

Existe o pressuposto de que os investidores são avessos ao risco e, por conseguinte, para níveis de risco superiores exigem rendibilidades superiores.

Para o nível de rendimento esperado mais elevado deve corresponder à situação em que o investimento se concentra no(s) título(s) cujo rendimento esperado é mais elevado. De forma análoga, o risco mínimo esperado acontece quando se aplica todo o investimento no(s) título(s) com menor desvio-padrão e consequentemente com o menor rendimento esperado.

FRONTEIRA EFICIENTE E CARTEIRA ÓTIMA



O modelo mostra que o que é relevante para a determinação do preço correcto, ou valor fundamental de um título, é a medida do contributo deste para o risco total da carteira de investimentos detida pelo investidor, e não a medida do risco total do título, considerado isoladamente. Assim, entre dois títulos com o mesmo valor esperado da taxa de retorno prevista, um investidor não escolherá aquele que possua a menor variância total, mas sim a menor covariância com a taxa de retorno prevista da carteira de outros investimentos de que seja titular.

Até aqui, o modelo de Markovitz é um contributo importante para os adeptos da avaliação de títulos pela via da determinação do valor fundamental, já que é aplicável mesmo para o caso em que as cotações não reflectem o valor fundamental.

No caso de existirem títulos sub-avaliados pelo mercado, a aplicação do modelo de Markovitz para a selecção da carteira de investimento óptima iria resultar num compromisso entre as vantagens de redução do risco de uma carteira totalmente diversificada, e as vantagens de aumento da taxa de retorno esperada, através de uma carteira mais concentrada nos títulos sub-avaliados pelo mercado. O modelo permite seleccionar uma carteira de compromisso óptima, em termos de utilidade para o investidor.

Porém, o modelo de Markowitz é de difícil aplicação prática. Se já não é fácil estimar a variância potencial dos erros de previsão das taxas de retorno de, por exemplo, uma centena de títulos, então é virtualmente impossível tentar estimar todas as covariâncias entre eles, isto é, cerca de 5000 pares de covariâncias, e de seguida resolver o enorme problema de programação quadrática necessário para determinar a fronteira eficiente.

Apesar das dificuldades de aplicação em termos quantitativos, fica a mensagem em termos qualitativos: o prémio de risco deve ter em conta a covariância entre as taxas de retorno esperadas para o título objecto de avaliação e as esperadas para os restantes investimentos detidos pelo indivíduo.

4. LIMITAÇÕES DA TEORIA DE MARKOWITZ

Apesar do inegável contributo teórico da teoria das carteiras e das possibilidades da sua aplicação, o modelo sofre algumas críticas.

Em primeiro lugar surgem os inúmeros cálculos necessários à sua formulação, designadamente no que se refere às covariâncias, que quando se utiliza um conjunto alargado de activos representa um efectivo problema prático. Ainda que as possibilidades de cálculo sejam hoje bastante superiores às que se verificavam na década de 50, este problema continua a constituir um entrave a algumas aplicações concretas do modelo. No caso de uma aplicação concreta ao PSI 20 seriam necessárias determinar 200 variâncias e covariâncias mas, no caso de estender a aplicação ao Dow Jones Industrial Average seriam necessárias cerca de 12500.

Uma outra limitação de que enferma o modelo de Markowitz reside no facto de se considerarem como rendimento e risco esperado os

valores históricos. Assim, qualquer alteração poderá distorcer os resultados obtidos e conduzir a soluções pouco robustas. É habitual sugerir-se, por este motivo, a utilização preferencial desta teoria para aplicações de longo prazo, embora os especialistas considerem que também no curto prazo, a aplicação deste tipo de procedimentos poderá trazer resultados mais vantajosos que outros tipos de procedimentos subjetivos.

5. OS CONTRIBUTOS DO MODELO DE SHARPE

W.F.Sharpe (1963) sugeriu que uma simplificação satisfatória do modelo de Markowitz era abandonar o cálculo da covariância de cada par de valores existentes, substituindo-os por outra variável obtida da relação existente entre cada título e o mercado em geral. Parte da hipótese de que “las rentabilidades de los diversos títulos se relacionan entre sí sólo porque guardan relación con algún factor subyacente básico”.

Define então a rendibilidade esperada de cada título em função do mercado representado por um índice representativo da evolução da actividade económica no período em referência.

Constrói então uma equação da regressão estimando os parâmetros a e b para cada título. Estima também as médias e as variâncias das variáveis e ainda a variância da variável residual.

Para esta última variável fixam-se determinadas hipóteses:

- $E \epsilon_{jt} = 0, \forall j$
- $Cov(\epsilon_{jt}, \epsilon_{ks}) = 0, \forall t, s / t \neq s$ (in correlação)
- $E \epsilon_{jt}^2 = \sigma_{\epsilon_j}^2, \forall t$ (homocedasticidade)
- $\epsilon_{jt} \approx N(0, \sigma_{\epsilon_j}^2)$ (normalidade)

Calcula a rendibilidade esperada e a variância (risco) de cada título i , cujas expressões são, respectivamente:

$$\sigma^2(r_i) = b_i^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$$

O valor esperado e a variância de uma carteira são dados por:

$$\mu_c = \sum_{j=1}^N a_j x_j + b_c \mu_I \quad e$$

$$\sigma_c^2 = b_c^2 \sigma_f^2 + \sum_{j=1}^N \sigma_{\varepsilon_j}^2 x_j^2$$

Os resultados obtidos mediante esta metodologia são constituídos pelo conjunto das % investidas em cada título e que resultam dos diferentes níveis de rentabilidade especificados para a carteira.

Sharpe retira conclusões semelhantes a *Markowitz*: há uma relação inversa entre um risco e o número de títulos de uma carteira, isto é, quanto maior o número de títulos mais reduzido o nível de risco, no sentido em que se reduz ou elimina o risco específico a partir de uma estratégia de diversificação.

6. CONCLUSÕES

Markowitz apresenta um modelo de avaliação de activos financeiros que adopta a perspectiva de avaliação de activos integrados em carteiras de investimentos. Trata-se de um modelo baseado no paradigma de comportamento racional, com informação completa e transaccionando em mercados sem fricções. Mas até que ponto este modelo é uma representação suficientemente aproximada da realidade?

Uma carteira que proporcione a maior rentabilidade esperada para um dado desvio padrão, ou o mais pequeno desvio padrão (ou variância) para uma dada rentabilidade esperada, é conhecida por carteira eficiente. Mas este modelo não é aconselhável para a gestão de carteiras para o dia a dia, mas constitui um modelo de estrutura a médio prazo, por exemplo, um ano.

Por outro lado, no programa algoritmo, que serve para a determinação da fronteira eficiente e para a tornar mais adaptada às realidades da gestão de carteira, é, igualmente, possível englobar um certo número de condições ligadas à política de aplicações do investidor. Assim o investidor pode ter como objectivo:

- um rendimento mínimo sob a forma de dividendos e lucros;
- não aplicar mais do que uma certa percentagem dos fundos disponíveis num mesmo título ou num dado sector económico;
- manter uma fracção fixa dos fundos sob a forma líquida, ou numa determinada aplicação.

De uma maneira geral estas condições reduzem o conjunto das carteiras possíveis e, eventualmente, a rendibilidade, mas elas permitem descrever, de um modo mais realista, os objectivos e a atitude de cada investidor.

Quanto à fronteira eficiente com a composição de cada carteira esta é obtida com os cálculos do modelo por computador sendo portanto uma fase puramente mecânica.

Contudo o modelo de Markowitz era de difícil aplicação prática, devido à necessidade de estimar um enorme número de covariâncias entre as taxas de retorno dos diversos títulos.

Estas dificuldades suscitaram que outros autores como Sharpe idealizassem novos modelos com os quais se pretende obter resultados iguais ou muito aproximados mas com um menor custo. A suposição básica de Sharpe quanto à observância de uma dependência estatística entre os rendimentos dos activos mobiliários e um ou vários índices que traduzem a evolução da actividade económica (e por essa via contornando a necessidade de analisar a relação directa entre as rendibilidades dos diferentes títulos) contribuiu para a aplicabilidade prática do modelo de Markowitz. Nesse sentido, o modelo de Sharpe substituiu com êxito o de Markowitz ao simplificar o processo de obtenção dos inputs necessários para aplicação do modelo visto que reduz substancialmente o número de inputs e operações necessárias.

Basicamente, a redução faz-se no campo das covariâncias entre o N títulos em análise. Enquanto no algoritmo de Markowitz eram necessário determinar $(N^2 - N) / 2$ covariâncias, no modelo de Sharpe requer apenas N inputs. Contudo são ainda necessários mais inputs pelo que a diferença de inputs de informação entre os dois modelos é de $N(N+3) / 2$ (Markowitz) para $3N + 2$ (Sharpe).

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Altman, E. I. Jacquiliant, B. e Levasseur, M., (1974) “comparative analyses of the Risk Measures: France and the United States”, *Journal of Finance*, 24, pp 1495-1511.

Brandão, Elísio. *Finanças*, Porto Editora, 2001.

Brealey, Richard A. e Stewart C. Myers. *Princípios de Finanças Empresariais*, 30edição. Mc GrawHill Portugal, 1992.

Doldán, Félix., *Economía Financeira de la Empresa*, Tórculo Edicións.Santiago, 2000.

Coheu, Kalman J. e Pogue, Jerry A. (1967) “An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio selection models”, *Journal of Business*, April.

Cruz, Ricardo. “As opções no contexto da teoria financeira”. IMC-BDP. Porto, 1997.

Markowitz, Harry M. (1952) “PortfolioSelection”, the *Journal of Finance*, Vol II, N.º 1, Mardi

Quintart, Aimable e Richard ZissWiller. *Teoria Financeira*, Caminho, Lisboa. 1994.

Sdnik, Bruno H. (1974), “Why not Diversify Internationally rather than Domestically?”, *Financial Analyst Journal*, 30, 48-54.

Sharpe, William F. (1963) “A simplified model of portfolio Analysis”, *Management Science*, 9: 277-293.

Solnik, Bruno e Bertrand Jacquillat. *Mercados Financeiros*, Rés, Porto, 1998.

Suárez, A.S., *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*, Pirámide, Madrid, 180, 1998.