DATA ENVELOPMENT ANALYSIS: EFICIÊNCIA RELATIVA DAS UNIDADES DE TOMADA DE DECISÃO

José Veiga Pereira

RESUMO

A avaliação das organizações e a determinação da performance obtida pelo exercício da gestão, tem sido uma preocupação constante de gestores e accionistas, embora com objectivos diversos. Nos dias de hoje, a questão coloca-se com maior acuidade quer pela competitividade acrescida quer pela dimensão e complexidade actual das empresas. Pretendemos com este trabalho fazer uma descrição da metodologia DEA – Data Envelopment Analysis – nas suas formulações iniciais mais simples. A metodologia do DEA, pretende obter uma medida única e simples de avaliação da eficiência, combinando um conjunto de outputs e de inputs relativos às diferentes unidades homogéneas que se pretendem avaliar.

O método DEA é um método não paramétrico que pelas suas características é particularmente adequado à avaliação de unidades homogéneas não necessariamente lucrativas.

Concluímos, em geral, que são úteis e constituem um avanço importante, as informações obtidas através do DEA mas que outros métodos, designadamente rácios e análises de regressão, podem dar um contributo importante para complementar aquela análise.

SUMÁRIO

1. O MÉTODO DEA – ASPECTOS GENÉRICOS

1.1. Introdução – Eficácia e Eficiência

Charnes, Cooper e Rhodes desenvolveram um trabalho que é a base dos avanços subsequentes sobre a avaliação da eficiência técnica em formas funcionais não paramétricas, como é o caso da análise da fronteira de eficiência, em especial do DATA ENVELOPMENT ANALYSIS – DEA.

O modelo "Data Envelopment Analysis", pode aplicar-se para avaliar o desempenho relativo de um conjunto de terminais de venda de uma empresa, uma linha de balcões de um banco ou de um conjunto de escolas.

Cada unidade é avaliada em relação às outras unidades do seu grupo com base numa multiplicidade de factores. As unidades mais eficientes definem uma fronteira em relação à qual se medem as eficiências de todas as outras unidades. A fronteira das unidades mais eficientes é definida através de técnicas de programação linear, uma vez que estamos perante problemas de optimização de resultados. Assim a medida pretendida por este método não traduz em termos absolutos a eficiência de uma empresa, em lucratividade, por exemplo, ou na sua robustez financeira como é o caso dos rácios mais comummente usados para o efeito, mas pretende confrontar várias unidades através de uma medida de eficiência suficientemente geral de modo a entrar em linha de conta com o máximo de factores que, de acordo com o seu papel na prossecução dos objectivos, serão encarados como *inputs* ou como *outputs*. Trata-se de uma medida multifactorial que envolve alguma complexidade tanto conceptual como matemática.

As principais utilizações do DEA são a avaliação da eficiência de programas e da administração em unidades, principalmente de fins não lucrativos, como as do sector público. Nestas unidades a aplicação dos métodos tradicionais de eficiência defrontam maiores dificuldades.

Antes de prosseguir, é necessário clarificar alguns termos, começando pelo termo *eficiência*, utilizado pelo DEA, e distinguindo-o de *eficácia* e de economia. Dir-se-á que uma unidade i é “económica” quando não ultrapassar os recursos para ela orçamentados. Dir-se-á que é “eficaz” quando cumpre os objectivos propostos. Dir-se-á que é “eficiente”, no sentido que vai ser usado no método DEA, se a relação entre o cumprimento dos objectivos propostos e a utilização dos recursos, num dado contexto, atinge o valor considerado como meta de eficiência.

Observe-se a figura 1 exemplificativa de situações de eficiência e de eficácia verificadas em diferentes unidades. A unidade A, embora tenha atingido em grau mais satisfatório o *output* esperado (maior eficácia), não utilizou da melhor forma os *inputs* que dispunha para o fazer, enquanto que a unidade B utilizou eficientemente os *inputs*, mas o grau atingido pelo seu *output* não é satisfatório.

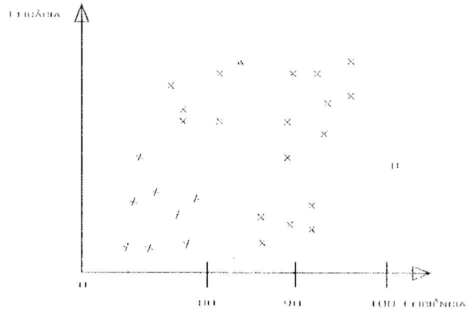

Fig. 1

Perante uma unidade, como A, não seria razoável aumentar os seus recursos para atingir metas mais elevadas no seu *output*, pois outras unidades com os mesmos *inputs*, conseguiriam fazê-lo.

Nas unidades eficientes, como a B, não é de esperar que atinjam valores mais altos nos seus *outputs*, a não ser que sejam detectadas falhas existentes nos seus recursos que impedem esses valores mais altos.

O conceito de eficiência é fundamental no âmbito do DEA. Por essa razão convém clarificar o significado que é atribuído a esse termo e a outros, próximos dele, como é o caso de eficácia e de economia. Adoptaremos as definições avançadas por Norman e Stoker [1991, pp. 9 e seg.], que aliás seguiremos de perto no presente capítulo.

1.2. A Eficiência Relativa – Estudos Preliminares

Segundo Farrel, autor de um trabalho realizado em 1957 que é considerado trabalho seminal na abordagem do DATA ENVELOPMENT ANALYSIS, a eficiência geral pode ser decomposta em eficiência na afectação ou custo e na eficiência técnica.

Assim, se a função produção estimada ou conhecida tiver a forma "convencional" de uma isoquanta, tal como a função Cobb Douglas, a relação entre os *inputs* e os *outputs* é rigorosamente determinada e a eficiência de uma dada unidade é obtida conforme mostra o figura 2 (op. Cit. pp. 254 e segs.).

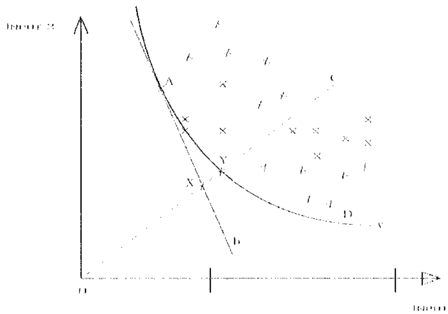

Fig. 2

Curva y - curva isoproduto
Vector b - recta de relação de preços entre os *inputs*

O ponto C representa as quantidades dos dois inputs necessárias à produção de uma unidade de *output* pela unidade de produção C.

O ponto Y representa a quantidade dos dois *inputs* necessários à produção de uma unidade de *output* pela unidade Y. Y utiliza a mesma proporção de *inputs* que C, mas basta-lhe uma fracção, OY/OC, dos *inputs* utilizados pela unidade C para obter a mesma produção que esta unidade. Sendo a relação dos preços entre o *input* 1 e o *input* 2 dado pelo declive da recta b, então o ponto de tangência A será o ponto de máximo inferior. Admitindo então o ponto X de produção igual à da curva y, temos as seguintes definições para os conceitos de *eficiência geral*, *eficiência técnica* e *eficiência dos custos*:

Eficiência geral (EG): EG= OX/OC
Eficiência técnica (ET): ET= OY/OC
Eficiência na afectação ou custo (EC): EC = OX/OY

EG=ET*EC=OX/OC=OY/OC*OX/OY

Na figura 2 só a unidade A é eficiente quer do ponto de vista técnico quer do ponto de vista dos custos. Se atribuirmos o valor 1 à eficiência da unidade A, a eficiência de qualquer outra, como X, virá menor que 1.

Na prática a forma da função produção é muitas vezes desconhecida, sobretudo se se trata de casos como por exemplo o ensino, a saúde ou em geral qualquer actividade do sector público. Nestas situações deve ser suficiente estabelecer uma medida de eficiência relativa baseada em observações dos dados verificados nas diferentes unidades a funcionar em condições idênticas, sem recorrer a fundamentos teóricos mais fortes. Assim, a forma utilizada para essas situações é não paramétrica, no sentido de que a sua forma funcional é desconhecida e portanto a função é construída empiricamente a partir de dados sobre os *inputs* e *outputs* de um conjunto de unidades. Neste caso a representação gráfica de eficiência seria conforme a figura 3.

Os eixos representam os *inputs* gastos por unidade de *output*. A fronteira de eficiência técnica é definida pela linha H, B, A, D, E em relação à qual se mede a eficiência relativa de qualquer unidade. Neste exemplo, a única unidade eficiente é a unidade A.

Eficiência da unidade A = OA/OA= 1
Eficiência da unidade C = EG = ET*EC
=OY/OC*OX/OY = OX/OC

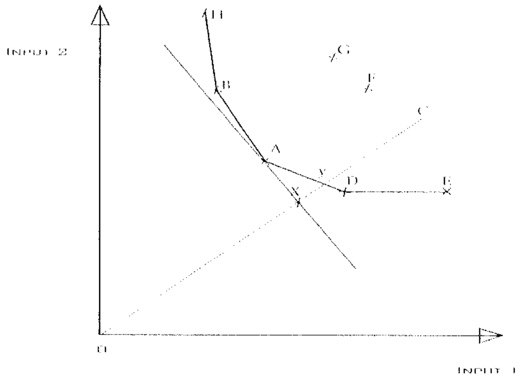

Fig. 3

Consideremos na figura 4 um outro exemplo em que se utiliza apenas dois *inputs* numa proporção sempre fixa, embora em quantidade variáveis, e em que não entram em consideração outros factores (mais *inputs* e/ou mais *outputs*). Das quatro unidades representadas na figura, a única que seria eficiente e que serviria de modelo para avaliar a eficiência de todas as outras do mesmo grupo, seria a unidade A. A fronteira neste caso reduzir-se-ia a um ponto, e a eficiência de todas as outr as unidades seria medida em relação a esse ponto.

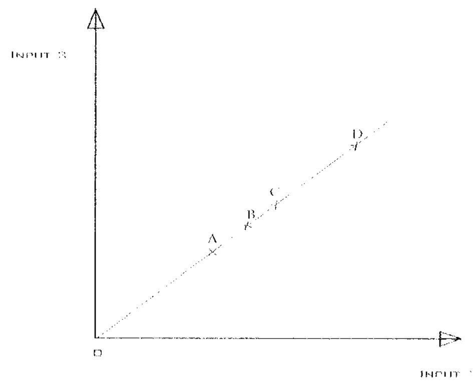

Fig. 4

A *eficiência relativa* de C seria OA/OC

Generalizando para vários *inputs* e vários *outputs* utilizáveis ou atingíveis, respectivamente em proporções diferentes, o processo torna-se bastante complexo e têm surgido várias linhas de orientação na determinação desse quadro de eficiência.

1.3. A Medida de Eficiência – RÁCIO CCR

Da definição de eficiência, adoptada no ponto 1.1, resulta, para a situação mais simples de um único *output* obtido a partir de um único *input*:

Eficiência = output / input

Na figura 5, apresenta-se essa situação. Considerando rendimentos constantes à escala, verifica-se que A é a unidade mais eficiente por ter o rácio *output/input* mais alto. Unindo o ponto A com a origem obtém-se uma linha cujos pontos apresentam igual eficiência. OA é a fronteira de eficiência, visto que as restantes unidades representadas na figura apresentam uma eficiência menor. A unidade A é pois a unidade de referência. Se atribuirmos o valor 1 à medida de eficiência da unidade A, medindo a eficiência de todas as outras relativamente a A, obteremos grandezas inferiores a 1.

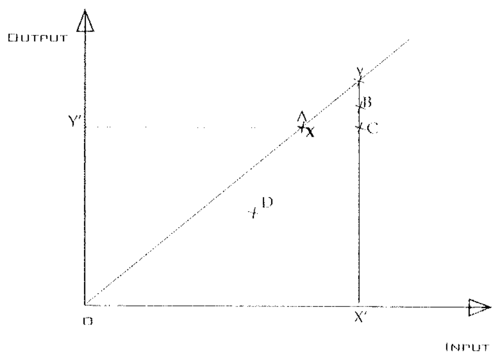

Fig. 5

A medida de eficiência da unidade C obtêm-se por qualquer dos rácios, X´C/X`y; Y´x/Y´C; que sendo iguais entre si são ainda iguais ao rácio Ox/Oy. Cada um destes rácios encerra, porém uma interpretação diferente:

– X´C/X´y mostra o *output* obtido, relativamente ao que poderia ser atingido com os mesmos custos se tivesse eficiência igual à de A;

– Y´x/Y´C mostra os *inputs* que deviam ser gastos, relativamente aos que foram gastos para atingir o mesmo rendimento sendo eficiente.

Se em vez de um único *output*, considerássemos dois *outputs* e um único *input*, e assumindo ainda rendimentos constantes à escala, a análise gráfica do problema mostraria que as unidades mais eficientes são as que se encontram mais afastadas da origem conforme a figura 6 seguinte.

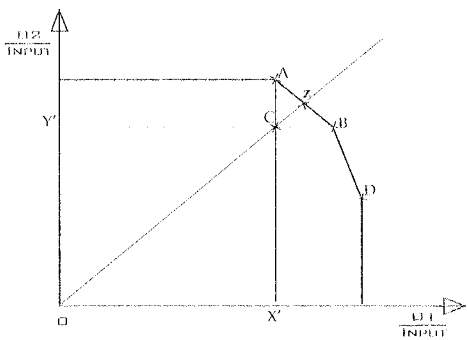

Fig. 6

A linha ABD, prolongada desde D até ao eixo dos X e desde A até ao eixo dos Y, reúne as unidades mais eficientes, é a fronteira de eficiência. Qualquer unidade nesta fronteira é eficiente. As unidades envolvidas por esta fronteira são as unidades ineficientes cuja eficiência será menor que 1. A medida de eficiência relativa das unidades que formam a fronteira é igual a 1. A medida de eficiência de C é OC/OZ < 1. O ponto Z representa os *outputs* O1 e O2 que deviam ser atingidos com um dado nível de *input* para que o rácio de eficiência da unidade C fosse o mesmo que o de uma suposta unidade Z na fronteira de eficiência ou, visto sob outro prisma, representa o *input* que devia ser gasto para obter o nível real de *outputs* O_1 e O_2 de tal forma que o rácio da unidade C fosse o mesmo de Z. A, B e D são unidades que estão na fronteira de eficiência e por isso são unidades de referência para medir a eficiência de qualquer unidade envolvida por essa fronteira.

No caso anterior podia haver uma unidade de referência para todas as unidades, pois a medida de eficiência tinha como base a obtenção de um único *output*, mas neste caso em que se produzem dois *outputs*, a partir de um único *input* isso já não acontece, podendo existir muitas unidades que produzam com eficiência ambos os *outputs*, embora em proporções diferentes.

A medida relativa de eficiência proposta por Charnes, Cooper e Rhodes (CCR) em relação à qual se medem as ineficiências das outras unidades é a proporção máxima dos *inputs* que poderiam razoavelmente ser utilizados para o *output* que realmente se obteve, ou seja, não seria admissível aumentar um dos *outputs* sem aumentar um ou mais dos *inputs* e/ou diminuir um ou mais dos outros *outputs*.

Alternativamente, a medida de eficiência recíproca daquela é o mínimo de *outputs* que poderia ser obtido pelos *inputs* utilizados, ou seja, não seria admissível diminuir um ou mais dos *outputs*.

O cálculo de valor absoluto desta eficiência óptima para um valor padrão é na maior parte das situações um caso complexo se não impossível.

O conceito é adaptado de modo a referir-se a eficiências relativas e já atingidas por uma ou mais unidades do mesmo conjunto.

"Cem por cento de eficiência relativa é atingível por qualquer (unidade) apenas quando, comparadas com outras (unidades) relevantes, não dão prova de ineficiência no uso de qualquer *input* ou *output*".

A eficiência é portanto calculada tendo por base as economias de gastos ou metas de resultados realmente atingidas por unidades homogéneas. Deste modo, o DEA não apenas identifica as unidades mais eficientes e as menos eficientes, mas mede as melhorias possíveis de eficiência.

O rácio definido por Charnes, Cooper e Rhodes (CCR) generaliza o rácio de eficiência definido com base num único *output* e num único *input* ao caso de unidades organizacionais com múltiplos *inputs* e *outputs*: "a medida de eficiência de uma unidade de tomada de decisão (UTD) é definida pela sua posição relativa à fronteira do melhor desempenho estabelecida matematicamente pelo rácio da soma ponderada dos *outputs* com a soma ponderada dos *inputs*."

$$\boxed{Eficiência = \frac{soma\ ponderada\ dos\ outputs}{soma\ ponderada\ dos\ inputs}}$$

O ponto de partida deste modelo é estabelecer quais os *inputs* e *outputs* que devem ser seleccionados sem especificar à priori com que pesos devem entrar na medida de eficiência geral. Ao medir a eficiência, tomando um rácio entre um particular *output* para um particular *input*, encontrar-se-ão algumas unidades mais eficientes segundo um rácio de eficiência alternativa, calculado com base noutro *output* e noutro *input*.

Admitindo-se flexibilidade na escolha dos pesos a usar na determinação da eficiência das várias unidades consideradas uma a uma, decorreria que cada unidade procuraria ponderar mais, se não exclusivamente, os *inputs* e os *outputs* que lhe fossem mais favoráveis na medida de eficiência, ou podendo mesmo favorecer *inputs* e/ou *outputs* cujo papel na identificação da eficiência do processo de funcionamento fosse secundário.

A medida proposta por Charnes, Cooper e Rhodes (1985), é a que resulta da solução de cada unidade índice 0 , no modelo seguinte:

$$\max h_0 = \frac{\sum_{r=1}^{t} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} u_r . y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, ..., n$$

$u_r ; v_i \geq 0, \forall_{r, i}$

onde:
v_i – peso a atribuir ao input i; i=1,...,m
u_r – peso a atribuir ao output r; r=1,...,t
y_{rj} – output r da unidade j
x_{ij} – input i da unidade j
n – número das unidades.

Os pesos a dar aos *inputs* e *outputs* são tratados como incógnitas a determinar pela solução do modelo. A solução óptima para cada unidade, dá a combinação de pesos capaz de optimizar a sua própria medida de eficiência, sem prejuízo de essa combinação de pesos poder não implicar para qualquer das outras unidades a eficiência 1. O conjunto de unidades cujo valor de eficiência for a unidade, será considerado o conjunto de referência para as unidades de eficiência inferior a 1.

A solução deste modelo, na forma fraccionária, pode ser obtida por um Programa Linear equivalente em formulação Primal ou Dual de Norman e Stoker (1991).

1.3.1. Formulações Originais

a) Formulação Primal

Na formulação Primal, o problema é apresentado da seguinte forma, onde se mantém a simbologia anterior:

$$\max h_0 = \sum_{r=1}^{t} u_r . y_{r0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_j \leq 0 \qquad j = 1, ..., n$$

$$u_r, v_i \geq 0 \forall_{r, i}$$

Só se optimiza o numerador porque se introduziu a condição de o denominador ser igual a 1 e na maximização de um rácio qualquer múltiplo de um valor óptimo será ainda um valor óptimo.

A unidade que está a ser observada é a unidade com índice $_0$. O valor óptimo $h^*_0 = \max h_0$ será um valor compreendido entre 0 e 1, com a solução dos valores u^*_r, $v^*_i \geq 0$, que satisfaz aquele óptimo.

a) Formulação Dual

Alternativamente, o problema podia ser resolvido pela formulação Dual do modelo anterior.

Neste caso, em que se mantém a simbologia anterior e α_j é o coeficiente associado à unidade de referência j, o modelo tomaria a seguinte forma:

min Z_o

Sujeito a:

$$Z_o x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} x_i \geq 0, \; i = 1, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_{rj} \geq y_o, \; r = 1, ..., t$$

$\alpha_j \geq 0, \forall_j$

$0 \leq Z_0^* \leq 1$ - valor óptimo de Z_0

α_j^* - solução que optimiza aquele valor de Z_0

A formulação Dual da Programação Linear permite uma maior clareza na interpretação dos resultados do DEA. Os pesos α_j definem uma unidade compósita que serve de referência à unidade de índice $_0$, que estamos a observar. O valor Z_0 é a medida de eficiência da unidade $_0$. Esta será eficiente quando $Z_0 = 1$. Z_0 mostra a proporção mínima do *input* que seria necessário para atingir o *output* de uma unidade eficiente, formada pela combinação linear das duas unidades eficientes que são unidades de referência para a unidade $_0$.

1.3.2. Formulações Recíprocas

Na formulação anterior, considerada formulação original, a medida de eficiência das unidades mostrava quanto era possível reduzir o *input* para um dado valor do *output*, isto é, analisava o problema sob o prisma da minimização dos *inputs*, embora a função objectivo estivesse a ser maximizada na formulação Primal. Na opinião de Norman e Stocker, a escolha de Charnes, Cooper e Rhodes da formulação que devia ser Primal não foi feliz pois, além de ser de interpretação menos clara, como já foi referido, provoca alguma confusão na medida em que a minimização dos *inputs*, é calculada através de uma formulação que maximiza a função objectivo. Se pretendermos agora ver o problema na perspectiva de quanto pode aumentar o *output* dado um certo valor do *input*, isto é, se quisermos analisar o problema sob o prisma da maximização dos *outputs*, estamos perante a formulação recíproca. A maximização dos *outputs* é calculada na formulação Primal, através da minimização da função objectivo.

Analisando graficamente o problema a duas dimensões e independentemente da dimensão da unidade, isto é, considerando rendimentos constantes à escala, as unidades eficientes são as que se aproximam do canto inferior esquerdo, de acordo com a figura 7 seguinte.

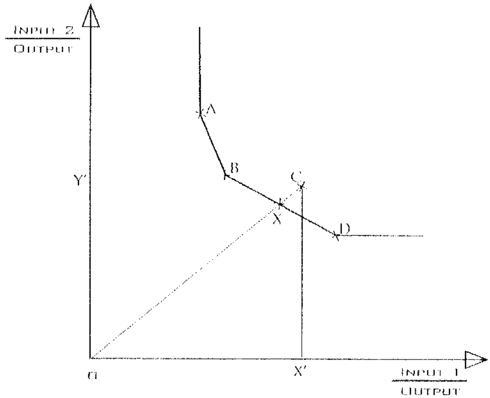

Fig. 7

As unidades A, B, D e os prolongamentos paralelos ao eixo dos y e ao eixo dos x a partir de A e de D, respectivamente, definem a fronteira de eficiência. A medida de eficiência da unidade C é agora OC/OX que é maior que 1. O valor 1 continua a ser a medida de eficiência das unidades de referência, isto é, das unidades que fazem parte da fronteira de eficiência, e as unidades ineficientes têm medidas superiores a 1. Matematicamente os cálculos também são feitos de maneira diferente.

$$\max h'_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}$$

sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \geq 1, \; j = 1, \ldots, n$$

$u_r ; v_i \geq 0, \forall_{r, i}$

onde:
v_i – peso a atribuir ao input i
u_r – peso a atribuir ao output r
y_{rj} – output r da unidade j
x_{ij} – input i da unidade j
n – número de unidades

A solução deste modelo fraccional pode ser dado pela Programação Linear equivalente na formulação Primal ou Dual.

a) Formulação Primal Recíproca

O modelo toma a seguinte forma, onde se mantêm a simbologia anterior:

$$\min h'_0 = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{r=1}^{t} u_r . y_{r0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x i_j - \sum_{r=1}^{t} u_r . y_{rj} \geq 0 \quad j = 1, ..., n$$

$u_r, v_i \geq 0 \forall_{r, i}$

A medida de eficiência da unidade vem dada pelo valor min h'_0
min h'_0 1
Se $h'_0 = 1$ a unidade é eficiente
Se $h'_0 > 1$ a unidade é ineficiente
Por outro lado, min $h'_0 = (1 / \max h_0)$ em que max h_0 é a medida de eficiência dada no modelo original.

b) Formulação Dual Recíproca

O modelo toma a forma:

max Z'_0

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j x_{ij} \leq x_{i0'},\ i = 1, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j y_{ij} \geq Z'_0 y_{rj},\ r = 1, ..., t$$

$$\alpha'_j \geq 0, \forall_j$$

Em que:

$$\alpha'_j = \frac{\alpha_j}{Z_0}$$

$$Z'_0 = \frac{1}{Z_0}$$

Onde se mantém a simbologia anterior, sendo α_j o coeficiente da unidade j e Z_0 a medida de eficiência no modelo original.

1.3.3. "Slacks"

O valor de h_0, tal como foi definido na formulação Primal, pode ser igual a 1, isto é, a unidade $_0$ pode fazer parte da fronteira de eficiência, mesmo assim, pode apresentar uma melhoria potencial no seu desempenho, quer pelo aumento de um ou mais dos seus *outputs* sem aumentar nenhum dos seus *inputs*, quer pela diminuição de um ou mais dos seus *inputs*, sem diminuir os seus *outputs*.

Considerando a figura 8 que se segue, apenas com dois *outputs* e um *input*, o cálculo de eficiência pelos modelos atrás apresentados daria $h^*_0 = 1$ e $Z^*_0 = 1$ para as unidades de U_1 a U_4, e $h^*_0 < 1$, para U_5 e U_6.

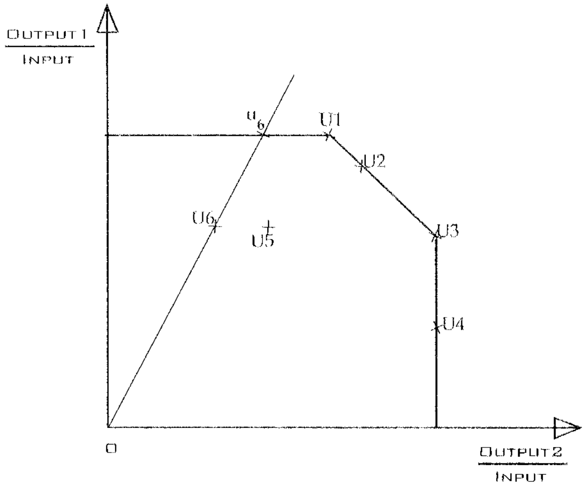

Fig. 8

Não existe nenhuma unidade com O_1/I mais baixo que o de U_3, que tenha um valor maior do que O_2/I dessa unidade. Assim a unidade U_4 está na fronteira da eficiência. No entanto, ela pode atingir um valor mais alto de O_1/I sem diminuir o O_2/I, baseando-se nos valores atingidos pela U_3. O desvio $U_3 - U_4$ é a melhoria potencial da unidade U_4, ou seja, um aumento de um *output* sem diminuir o outro *output* nem aumentar o *input*.

Considerando agora o caso da unidade U_6, ela pode reduzir o seu *input* mantendo os *outputs* O_1 e O_2 até atingir o u_6. Não é de esperar, com base nos desempenhos atingidos pelas outras unidades, qualquer outra redução dos *inputs* sem alterar os *outputs*, pois isso significaria ultrapassar os limites da fronteira de eficiência. É de esperar, com base no desempenho da unidade U_1, que a unidade U_6 consiga um aumento do *output* O_2 sem diminuir o *output* O_1 nem aumentar o *input* I.

Pela formulação recíproca poderíamos chegar a conclusão idêntica.

Considere-se para o efeito a figura 9, com dois *inputs* e um único *output*. A unidade U_4, embora na fronteira de eficiência tem uma melhoria potencial relativamente a U_3.

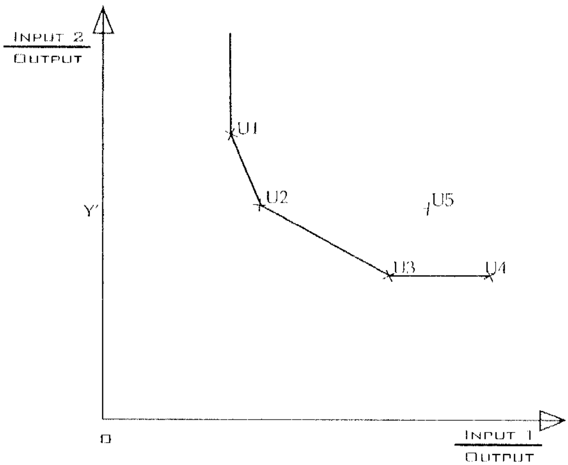

Fig. 9

O desvio U_4 - U_3 representa neste caso, uma melhoria potencial em termos de economia de um *input* sem aumentar o outro *input* ou diminuir o *output*.

Generalizando estas situações para múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*, o problema é contornado pela solução apresentada por Charnes, Cooper e Rhodes apresentando a formulação Dual da Programação Linear a seguinte forma, na versão original e na versão recíproca, onde se mantém a simbologia anterior.

a) Formulação Dual com "slacks"

$$\min \left[Z_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^{t} s^+_r + \sum_{i=1}^{m} s^-_i \right) \right]$$

Sujeito a:

$$Z_0\, x_{i0} - s^-_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Y_{rj} - s^{+}_{r} = y_{rj}, \qquad r = 1, ..., t$$

$$\alpha_j , s^{+}_{r} , s^{-}_{i} \geq 0, \forall_{j,r,i}$$

s^{+}_{r} e s^{-}_{i} são as variáveis "slacks" e a sua introdução transforma as desigualdades das restrições em igualdades. ε é um valor positivo muito pequeno, normalmente da ordem de 10^{-6}.

A medida de eficiência calculada por este modelo não difere da medida de eficiência definida por CCR.

b) Formulação Dual recíproca com "Slacks"

O modelo toma a forma:

$$\max \left[Z'_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^{t} s^{+}_{r} + \sum_{i=1}^{m} s^{-}_{i} \right) \right]$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j x_{ij} + s^{-}_{i} = x_{i0}, \quad i = 1, ..., m$$

$$- \sum_{j=1} \alpha'_j x_{rj} + Z'_0 y_0 + s^{+}_{r} = 0 \qquad r = 1, ..., t$$

$$\alpha_j , s^{+}_{r} , s^{-}_{i} \geq 0, \forall_{j,r,i}$$

ε' preenche as condições referidas para ε.

Esta nova versão impõe mais uma exigência à medida de eficiência de uma unidade. A unidade será eficiente se $Z_0 = 1$ e os desvios forem iguais a 0, será ineficiente se $z_0 < 1$ e/ou um ou algum dos desvios forem positivos.

1.4. A Selecção dos *inputs* e dos *outputs*

Os diferentes resultados da actividade das unidades comparáveis são tomados como *outputs*. Em alguns casos justifica-se considerá-los agregadamente. Por exemplo, considerar-se-á a soma dos diferentes produtos produzidos ou comercializados pelas unidades, como um *output* distinto. O mesmo se poderia dizer relativamente aos *inputs*.

Os recursos utilizados na actividade das unidades, devem entrar como *inputs* dessa actividade, bem como os factores envolventes que favoreçam essa actividade. O número de factores, *inputs* e *outputs*, que forem considerados na avaliação do desempenho pela aplicação do método DEA influencia o resultado desta avaliação. Por um lado quantos mais factores entrarem mais significado dão à avaliação pretendida, mas esse número, sendo grande, pode também comprometer o resultado do método. Esta constatação torna-se clara se considerarmos a medida de eficiência produzida pelo método.

São eficientes todas as unidades que apresentarem vantagem relativa em pelo menos um rácio formado por um *output* particular e um *input* igualmente particular. Deste modo, se estivermos perante uma situação em que se utilize 4 *outputs* e 4 *inputs*, os rácios particulares referidos são 16 e portanto a aplicação do método garante a existência de 16 unidades eficientes. Este número poderá ser menor se uma ou mais unidades apresentar vantagem relativa em mais do que um desses

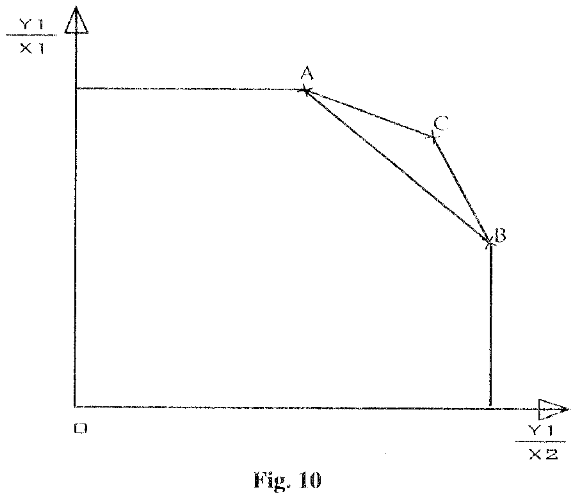

Fig. 10

rácios particulares. Um outro facto pode elevar consideravelmente esse número de unidades eficientes o que acontece com frequência. Considere-se a situação representada na figura 10 em que as unidades são comparadas entre si, relativamente aos resultados obtidos por elas em dois rácios particulares, Y_1/X_1 e Y_1/X_2.

A unidade A é eficiente porque é a que obtém uma maior quantidade de Y_1 por uma unidade de X_1 e a unidade B é eficiente porque é a que obtém maior quantidade de Y_1 por unidade de X_2. A unidade C não estando em primeiro lugar em nenhum destes dois rácios também é eficiente, obrigando a fronteira a inflectir na sua direcção, porque o seu desempenho é ainda melhor do que o de qualquer unidade compósita, obtida pelo "trade-off" entre os desempenhos das unidades A e B naqueles rácios, representado pela recta que une A e B.

Verifica-se pois que o número de unidades eficientes que podem resultar da aplicação deste método pode ser muito superior ao número de rácios particulares formados e que quantos mais factores introduzirmos na aplicação, maior será o número de unidades eficientes resultante. As unidades eficientes funcionam como unidades de referência relativamente a grupos maiores ou menores das restantes unidades. O número de factores pode comprometer os resultados do método pelo exagerado número de unidades de referência, resultantes do grande número de factores. Esse número tem que ter em atenção o número de unidades que se pretendem avaliar, sendo recomendável que o número de unidades seja largamente superior ao produto do número de *outputs* pelo número de *inputs*.

1.5. Interface entre os Resultados da Análise DEA e os Objectivos da Gestão

Os resultados da análise, importantes pela determinação de medidas de eficiência e metas atingíveis para as unidades, não dispensam um confronto com os objectivos da administração.

Uma determinada unidade apresentará um valor de eficiência perante um dado conjunto de factores escolhidos e outro valor diferente para outro conjunto de factores. Cabe então à administração definir, não apenas os *outputs* e *inputs* a incluir, mas definir também até que ponto devem os diferentes *outputs* ser particularizados, bem como os diferentes *inputs*.

Um *output* particular pode ser mais dispendioso em *inputs*, originando uma menor eficiência para a unidade que o produz em maior proporção. Ou inversamente se um particular produto é menos exigente em recursos do que os restantes produtos, as unidades que o produzirem em maior proporção, exibirão medidas de eficiência de custos mais altas, mas é uma eficiência baseada unicamente no uso de recursos para atingir a globalidade de produtos que essas unidades produziram. A proporção em que os produtos deviam ser produzidos é uma questão de objectivos planeados. Essa particularização dos *outputs* permite não só conhecer as razões da maior ou menor eficiência apresentada por uma unidade, como orientar as diferentes unidades na rectificação do seu "output-mix".

É igualmente necessário particularizar os *inputs*. Encará-los na sua globalidade pode não permitir identificar possíveis fontes de ineficiência na sua utilização. Uma vez detectada a fonte de ineficiência, através dessa particularização, a sua eliminação para algumas unidades, por exemplo através da introdução de tecnologias já disponíveis pelas outras unidades, faz parte da programação. Esse facto deve ser considerado na apreciação da eficiência. Do mesmo modo que é possível detectar fontes de ineficiência através da partilha de custos, é igualmente possível detectar fontes específicas de eficiência nessa partilha. Daqui se conclui que o estabelecimento da estrutura do modelo de eficiência requer a análise dos objectivos da administração geral.

Considerando unidades de fim não lucrativo, como por exemplo escolas, se uma particular área de estudos é menos exigente em pessoal especializado, ou este existe em maior abundância e com grau de formação mais elevado, as escolas que proporcionalmente produzirem mais certificados nessa área, exibirão por esse método medidas de eficiência de economia de recursos mais altas, mas é uma eficiência, melhor diríamos uma eficácia, vista unicamente na obtenção de resultados. A proporção desses certificados será uma questão de objectivos planeados para o ensino. Daqui se conclui, igualmente, que o estabelecimento da estrutura do modelo de eficiência requer a análise dos objectivos da administração geral das unidades em estudo.

Para além deste modelo de eficiência, voltado para os factores internos, para a sua utilização económica dos diferentes recursos na obtenção dos diferentes resultados, outros modelos necessariamente terão de ser criados para a análise de factores externos.

Se considerarmos unidades com fins lucrativos, como por exemplo unidades de venda, esses factores externos poderão ser a conquista de mercado ou o rendimento potencial da unidade. Nesse modelo os *outputs* são os rendimentos reais dos diferentes produtos, os valores apresentados pelos respectivos crescimentos, bem como as potencialidades desse crescimento. Os *inputs* são as condições apresentadas pelos respectivos crescimentos, bem como as potencialidades desse crescimento. Os *inputs* são as condições apresentadas pelos destinatários dos produtos da unidade: a sua densidade, as suas características, a concorrência existente, etc..

Potencialidades do Método

A aplicação do método DEA permite dispor de uma fonte de informação importante para a tomada de decisões numa unidade organizacional. De entre os principais resultados da utilização do DEA, em parte referidos por A Boussofiane e outros (1991), no seu artigo "Appllied Data Envelopment Analysis", podem-se apontar os seguintes:

a) Estabelece uma medida de eficiência relativa das unidades organizacionais;

b) Define unidades de comparação ou de referência;

c) Essas unidades podem ser identificadas como constituindo padrões de desempenho;

d) Propõe metas a atingir pelas unidades ineficientes;

e) Identifica áreas de eficiência;

f) Orienta a aplicação de recursos;

g) Projecta resultados para orientação de colocação de recursos;

h) Determina políticas ou períodos de eficiência.

a) Medida de eficiência relativa das unidades

Esta medida, é o principal resultado do uso do método:

– Mede a máxima proporção dos *inputs* necessários para atingir o seu nível real de *output* de forma eficiente.

– Ou reciprocamente, mede o mínimo valor por que deveria ser multiplicado o seu *output*, mantendo os seus *inputs* reais, de forma a ser eficiente.

b) Unidades de comparação ou de referência

– Identifica, para cada unidade ineficiente, o conjunto de unidades que, com a mesma orientação em *inputs* e *outputs*, ultrapassam o desempenho dessa unidade, servindo por esse facto de unidades de referência.

As unidades de comparação identificadas, podem representar modelos de boa prática operacional uma vez que têm a mesma orientação *input/output*. Pelo método Dual, as unidades de comparação aparecem associadas a pesos, formando uma unidade compósita, formada por uma combinação linear dos pontos representativos das unidades eficientes permite apresentar com mais clareza e portanto demonstrar a insuficiência do desempenho das unidades ineficientes. O peso com que cada unidade eficiente entra nessa unidade compósita é ainda indicador para a unidade eficiente do padrão de que mais se aproxima.

c) Unidades padrão de desempenho

Entre as unidades eficientes, umas são melhores exemplos do que outras. Algumas unidades aparecem como eficientes no cálculo DEA, porque o seu desempenho se destaca num particular rácio *output/input*, que pode ser o mais significativo, enquanto noutros rácios com um papel mais importante no desempenho geral, os seus valores são baixos.

Um indicador desses factos também nos aparece dentro dos cálculos do DEA. O DEA dispõe de processos de cálculo que ilustram as áreas de eficiência de cada unidade eficiente. O processo de cálculo mostra como uma unidade eficiente, detentora de eficiência geral, é uma unidade de referência para um vasto leque de outras unidades, enquanto que uma unidade eficiente que se distingue apenas por uma eficiência específica pode, em situação extrema, ser unidade de referência apenas para ela própria. Embora haja indicadores alternativos como a "Cross Efficiency Matrix" este número maior ou menor de unidades para as quais a unidade eficiente é unidade de referência, que se denomina frequência da unidade eficiente, é o mais simples de obter.

d) Identificação de metas a atingir pelas unidades ineficientes

Os valores atingíveis pelas unidades ineficientes com o fundamento de que outras, num contexto idêntico, os atingiram, é também um resultado da aplicação do DEA.

Esses valores tanto podem ser vistos como diminuição dos seus *inputs* como o aumento dos seus *outputs*.

Através do cálculo pela Programação Linear Dual, os valores dos *inputs* que deviam ser gastos e os valores dos *outputs* que deviam ser obtidos pelas unidades ineficientes, serão dados, numa perspectiva de minimização de *inputs*, pelas expressões:

$Z^*_0 x_{i0} - S_i^{-*} \quad i = 1, \ldots, m$

$y_{r0} + S_r^{+*}, \quad r = 1, \ldots, t$

isto é, reduzindo os seus inputs na proporção Z^*_0 e pelos desvios si^{-*} e corrigindo os seus *outputs* pelos desvios S_r^{+*} (Boussofiane et al, 1991).

O valor dos *outputs* atingíveis pelas unidades ineficientes dados pelos valores obtidos nas unidades eficientes através da formulação recíproca, numa perspectiva de maximização dos *outputs* é determinado pelas expressões:

$x_{i0} - S_i^{-*} \quad i = 1, \ldots, m$

$Z'_0 y_{r0} + S_r^{+*} \quad r = 1, \ldots, t$

Em que:

$$\alpha'_j = \frac{\alpha_j}{Z^*_0}$$

$$Z'^*_0 = \frac{1}{Z^*}$$

$$S_i^{-*} = \frac{S_i^{-*}}{Z^*_0}$$

$$S_r^{+*} = \frac{S_r^{+*}}{Z^*_0}$$

e) Identificação de áreas de eficiência

Através do cálculo pela PL Primal consegue-se detectar as áreas em que a unidade se apresenta com o seu melhor desempenho, no uso particular de um recurso ou actividade particular quer essa unidade seja ineficiente, quer seja eficiente.

Se a unidade é ineficiente então $u_r\ y_{r0}$, para os valores óptimos de u_r, dá o seu valor de eficiência. Cada parcela de $u_r\ y_r$, dessa soma, é referida por Boussofiane e outros, 1991 como *output* virtual. Através da análise desse somatório podem detectar-se os *outputs* virtuais que, por apresen-tarem o valor $u_r\ y_{r0}$ mais alto, contribuíram para a medida da eficiência da unidade.

Procedendo-se deste modo para os *inputs*, pode-se detectar aqueles *inputs*, virtuais segundo os mesmos autores, em que o valor de $v_i\ x_{i0}$, por ser mais alto, mais contribuiu para o total, que é 1, pela restrição que impusemos.

De forma idêntica se pode encontrar nas unidades eficientes a sua particular área de eficiência. Assim, mesmo entre as unidades eficientes, para além da eficiência mais ou menos geral que possam apresentar, elas podem representar áreas de eficiência específica diferentes que mutuamente podem servir de padrões para adicionais melhorias nessas unidades.

Mesmo em situações em que se introduzam restrições às estruturas de pesos, restrições sugeridas por, entre outros, Dyson e Thanassoulis (1998), a medida de eficiência é calculada pelo processo habitual e a flexibilidade dos pesos dos *inputs* e *outputs* permite ainda detectar áreas específicas de eficiência entre unidades eficientes.

f) Orientação de aplicação de recursos

A identificação das unidades eficientes e ineficientes dá uma primeira indicação da orientação da aplicação dos recursos. Em especial as ineficiências detectadas mostram o potencial aumento de *outputs* e/ou diminuição de *inputs*.

Para uma análise mais completa desta orientação será necessária a construção de mais do que um modelo de DEA. Um desses modelos mede a eficiência do aproveitamento dos recursos usados para obter os resultados da unidade e outro modelo deve medir a eficiência no meio envolvente.

Um dos processos seria incorporar no mesmo modelo esses dois aspectos. Porém, partindo do pressuposto que não existe "trade-off" entre esses dois tipos de desempenho, uma unidade podia simultaneamente atingir melhor desempenho em cada um dos aspectos e a sua incorporação no mesmo modelo conduziria a uma subestimação do desempenho potencial.

Outra maneira de tratar este problema, seria criar dois modelos de DEA e aplicá-los sucessivamente. Assim, um modelo DEA determinaria o potencial atingível dadas as características do meio envolvente e outro modelo DEA partiria desse potencial e determinaria os recursos exigidos para atingir esse valor. Mas este procedimento conduziria a não levar em linha de conta a fronteira de eficiência que é a grande força deste método. Aqueles modelos aplicados separadamente detectavam valores de eficiência, realmente atingidos pelas unidades, isto é, em cada caso haveria uma fronteira de eficiência, mas a combinação dessas duas metas representaria um nível não atingido realmente por alguma unidade e portanto seria um ponto fora da fronteira de eficiência.

Outro processo que não sacrificaria a fronteira de eficiência seria a construção e aplicação em separado dos dois modelos atrás referidos. A estimação do potencial atingível, dadas as características do meio envolvente, é só por si um resultado importante do método DEA, para fundamentar a orientação na aplicação dos recursos.

A apreciação dos resultados dos dois modelos, permite detectar as unidades eficientes na penetração no meio, mas com potencial melhoramento da utilização dos seus *inputs* e/ou na obtenção dos seus *outputs*; por outro lado podem surgir unidades com eficiente utilização dos *inputs*, mas com potencial melhoramento na penetração do meio; haverá ainda unidades com melhoramentos potenciais em ambas as situações.

Os resultados obtidos nos dois modelos referidos, estão representados na figura 11, em que os eixos representam respectivamente a eficiência na utilização dos recursos e eficiência na penetração do mercado, mostram que as unidades U_1 e U_2 são eficientes na penetração de mercado (M), mas apresentam melhorias potenciais na utilização de recursos(R). A unidade U_3 é eficiente na utilização de recursos, apresentando potenciais melhorias no mercado. A unidade U_6 apresenta forte potencialidades nos dois aspectos. A unidade U_5 apresenta algum melhoramento potencial no aproveitamento de recursos e grande potencial de melhoramento na penetração de mercado, enquanto que a unidade U_4 está na situação inversa.

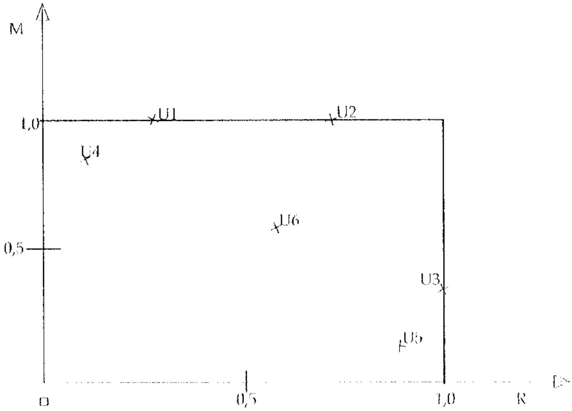

Fig. 11

g) Projecção de resultados para orientação de colocação de recursos

Para a análise da eficiência de uma unidade podem-se estabelecer mais do que um modelo de eficiência, conforme se viu no ponto anterior. Um desses modelos permite a análise da eficiência na utilização de recursos detectando as economias de recursos possíveis; o outro modelo analisa a eficiência na penetração do mercado, considerando as características do meio envolvente, detectando as melhorias possíveis na obtenção do rendimento de unidade.

É possível ainda delinear um terceiro modelo DEA, apresentado por Norman e Stoker (1991, pp. 146 e segs.), que analise a eficiência da unidade em termos potenciais com o fim de fundamentar as decisões, quer de orientação de recursos, quer de encerramento de unidades não lucrativas.

Neste modelo de eficiência potencial ter-se-ia de entrar em consideração, além das características envolventes, com o tempo de funcionamento da unidade, visto que o rendimento obtido apresenta-se relacionado com esse tempo e esse facto é fundamental numa perspectiva de projecção dos resultados.

Uma unidade pode apresentar-se eficiente e no entanto apresentar prejuízos devido à eficiência no aproveitamento de recursos ser insuficiente. Esse prejuízo corrente não impede que através da análise da melhoria potencial em economias de custo se conclua que a unidade é potencialmente geradora de lucros.

Pode ir-se mais longe, segundo aqueles autores, nesta análise detectando o montante potencial de lucro que uma unidade pode atingir num determinado período de tempo.

Projectando para um período de cinco anos, o rendimento de uma unidade eficiente pelo modelo de eficiência total, obtemos um rendimento atingível com a sua actual eficiência e com as actuais condições envolventes. Projectando, do mesmo modo, os custos que a unidade actualmente suportaria se fosse eficiente, obtemos o seu lucro potencial para o período considerado.

h) Determinação de políticas ou períodos de eficiência

O DEA permite ainda determinar quais as políticas com eficiência relativa de entre um conjunto de políticas implementadas, ou quais os períodos de eficiência relativa num determinado intervalo de tempo independentemente do nível de eficiência da unidade.

Para a determinação de políticas eficientes parte-se de uma situação em que cada uma das políticas está a ser usada por n unidades. Para determinação de políticas eficientes aplica-se o DEA em duas fases. Numa primeira fase, eliminam-se as unidades ineficientes entre as que aplicam a mesma política. No final desta fase, temos seleccionadas as unidades eficientes em cada política. Na segunda fase, aplica-se o DEA a esse conjunto, obtendo medidas de eficiência que se atribuem às políticas.

O DEA pode ser também utilizado para determinar períodos de eficiência. Para complementar a determinação da eficiência de uma unidade em termos de *inputs* e *outputs* conseguidos, pode avaliar-se a evolução dessa eficiência no tempo: mês, trimestre ou ano. Para isso cada unidade é avaliada nos k períodos como se se tratasse de k unidades, às quais se aplica o DEA de forma habitual.

Existem no entanto processos mais aperfeiçoados para este cálculo, como por exemplo a "window analysis" de Charnes e outros. (1985).

2 - VARIANTES DO MÉTODO

2.1. Modelo para Rendimentos à Escala Variáveis

O modelo, tal como foi apresentado no capítulo anterior, pressupõe rendimentos constantes à escala.

Quando se está em presença de rendimentos variáveis à escala, a utilização dos modelos anteriores não clarifica se determinada ineficiência é devida à escala em que a unidade está a operar ou se é de outra natureza.

Os melhoramentos introduzidos no método DEA por Banker e Cooper (1984), cujo texto vamos seguir de perto, permitem a distinção entre essas duas formas de eficiência.

2.1.1. A Análise do Modelo a Duas Dimensões

A eficiência geral pode decompor-se em eficiência de escala e eficiência de técnica. As diferenças entre essas duas eficiências podem ser ilustrada através da figura 12, adaptada de Banker e outros, (1984).

A figura 12 representa o conjunto de possibilidades de produção. Nela estão representadas seis unidades U_1 até U_6, a laborar com um único *input* x e um único *output* y.

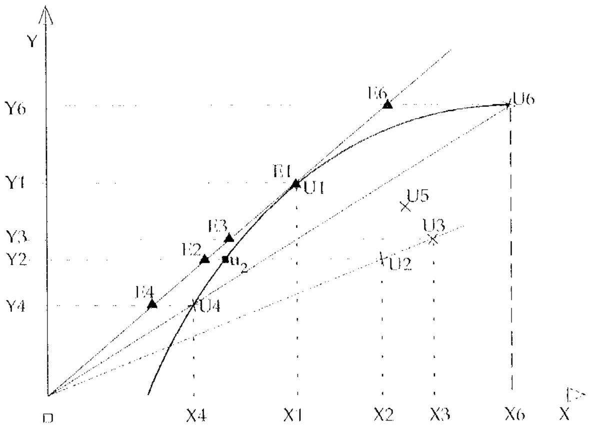

Fig. 12

O cálculo de eficiência nesse conjunto permitiria encontrar o valor dessa eficiência para cada unidade utilizando a formulação Primal da Programação Linear, (ver a) do ponto 1.3.1).

$\max h_0 = u\, y_0$
Sujeito a :
$v\, x_0 = 1$
$u\, y_j - v\, x_j \leq 0,$
$u, v \geq 0$

Banker e outros obtiveram as seguintes soluções para este problema:

$$\max h_4 = \max h_6 = u^*_4\, y_4 = u^*_6\, y_6$$

$$v^*_4\, x_4 = 1 \qquad v^*_6\, x_6 = 1$$

$$u^*_4\, y_1 - v^*_4\, x_1 = 0 \quad u^*_6\, y_1 - v^*_6\, x_1 = 0$$

$$u^*_4\, y_4 - v^*_4\, x_4 < 0 \quad u^*_6\, y_6 - v^*_6\, x_6 < 0$$

Os valores h^*_4 e h^*_6 são menores que 1, e unidades U_4 e U_6 são igualmente ineficientes. O cálculo permite identificar as unidades eficientes. A unidade U_1 é eficiente pois com os mesmos pesos obtém-se para h^*_1 o valor 1.

$$h_1^* = \frac{u_4\, y_1}{v_4\, x_1} = 1 \qquad h_1^* = \frac{u_6\, y_1}{v_6\, x_1}$$

$$\max h_2 = \max h_3 = u^*_2\, y_2 = u^*_3\, y_3$$

$$v^*_3\, x_3 = 1 \qquad v^*_2\, x_2 = 1$$

$$u^*_3\, y_1 - v^*_3\, x_1 = 0 \quad u^*_2\, y_1 - v^*_2\, x_1 = 0$$

$$u^*_3\, y_3 - v^*_3\, x_3 < 0 \quad u^*_2\, y_2 - v^*_2\, x_2 < 0$$

Os valores de h^*_2 e h^*_6 são menores que 1 e também aqui o cálculo permite encontrar a unidade eficiente U_1 aplicando a esta unidade os pesos das unidade U_2 e U_3.

$$h_1^* = \frac{u_3 y_1}{v_3 x_1} = 1 \qquad h_1^* = \frac{u_2 y_1}{v_2 x_1} = 1$$

A medida de eficiência, calculada por este processo considera rendimentos constantes à escala e através dela, só a unidade U_1 é eficiente. U_2 até U_6 são unidades ineficientes. A eficiência de todas as unidades é medida relativamente a U_1.

U_2 e U_3 são igualmente ineficientes relativamente a U_1, e as unidades U_4 e U_6 são igualmente ineficientes relativamente a U_1. Para muitas situações esta medida é suficiente. Através dos desenvolvimentos R.D. Banker, A. Charnes e W. W. Cooper, 1984, introduzidos no método DEA, é possível detectar diferenças entre as ineficiências de U_4 e U_6 e as de U_2 e U_3.

A medida de eficiência de U_2 é obtida com referência a E_2, (ver figura 12), assim como α de U_3 é obtida com referência a E_3. A condição de convexidade não foi introduzida. Os pontos E_2 e E_3 representam pontos de eficiência geral, isto é, incluem a eficiência técnica e a eficiência à escala. E_2 e E_3 reflectem a produtividade média atingível na dimensão mais produti-va que é a dimensão U_1. Porém E_2 e E_3 são pontos que estão fora das possibilidades de produção, considerando estas obtidas de entre as produções efectivamente observadas nas unidades organizacionais.

Segundo aquela figura, decompondo a eficiência geral em eficiência técnica e eficiência à escala obteríamos para a unidade U_6:

$$\text{Eficiência à escala} = \frac{y_6 E_6}{y_6 U_6} < 1$$

$$\text{Eficiência técnica} = \frac{y_6 U_6}{y_6 U_6} = 1$$

A unidade U_6, tal como a unidade U_4 é tecnicamente eficiente.

As unidades U_2 e U_3 são ineficientes tecnicamente e operam numa escala ineficiente. Os valores de eficiência de U_2 seriam:

$$\text{Eficiência técnica} = \frac{y_2\, u_2}{y_2\, U_2} < 1$$

$$\text{Eficiência à escala} = \frac{y_2\, E_2}{y_2\, u_2} < 1$$

2.1.2. Generalização do Modelo para Múltiplos *inputs* e Múltiplos *outputs*

O modelo inicial de Charnes, Cooper e Rhodes, com os desenvolvimentos introduzidos, permite medir a eficiência técnica das unidades, aumentando assim consideravelmente o interesse deste método, uma vez que muitas vezes a eficiência à escala é preterida em função de outros objectivos da unidade organizacional.

O modelo CCR que identifica qualquer ineficiência técnica relativa nas unidades organizacionais, com rendimentos variáveis à escala, é apresentado por Norman e Stoker, (1991, pp. 106 e segs.) da forma que passamos a expor:

$$\max \mathrm{h}_0 = \frac{\sum_{r=1}^{t} u_r y_{r0} + C_0}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{t} u_r . y_{rj} + C_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_i . x_{ij}} \leq 1, \; j = 1, \ldots, n$$

u_r ; $v_i \geq 0, \forall_{r,j}$

onde:
v_i – peso a atribuir ao *input* i
u_r – peso a atribuir ao *output* r
y_{rj} – *output* r da unidade j
x_{ij} – *input* i da unidade j
n – número das unidades

C_0 - Constante que impõe a restrição de convexidade ao modelo.

A solução é dada pela Programação Linear equivalente nas suas formulações Primal e Dual (op. Cit. pps. 250 e 251).

2.1.3. Formulações Originais

a) Formulação Primal

Pela formulação primal equivalente, o problema é apresentado da seguinte forma, onde se mantém a simbologia anterior:

$$\max h_0 = \sum_{r=1}^{t} u_r . y_{r0} + C_0$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{rj0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} + C_0 - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, ..., n$$

$u_r ; v_i \geq 0, \forall_{r,i}$

b) Formulação Dual

Alternativamente, o problema podia ser resolvido pela formulação Dual da Programação Linear.

Neste caso o modelo, onde se mantém a simbologia anterior, tomaria a forma:

min Z_0

Sujeito a:

$$Z_0 \, x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} \geq 0, \, i = 1, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{rj} \geq y_{r0} \, , \, r = 1, ..., t$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

$\alpha_j \geq 0, \forall_j$

Esta formulação difere da que foi apresentada para rendimentos constantes à escala pela restrição adicional $\sum \alpha_j = 1$, para j = 1, ..., n, chamada restrição de convexidade. Esta restrição assegura que o cálculo na medida reflicta apenas a eficiência técnica da unidade observada, isto é, da unidade com índice $_0$.

Utilizando as formulações recíprocas, as formulações Primal e Dual viriam alteradas.

2.1.4. Formulações Recíprocas

a) Formulação Primal Recíproca

O modelo onde se mantém a simbologia anterior toma a seguinte forma:

$$\min h'_0 = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} - C_0$$

Sujeito a:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_r y_{rj} - C_0 \geq 0 - \quad j = 1, \ldots, n$$

$$u_r ; v_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m; \; r = 1, \ldots, s$$

A medida de eficiência da unidade vem dada pelo valor min h'_0.
min h
Se $h'_0 = 1$ a unidade é eficiente
Se $h'_0 > 1$ a unidade é ineficiente

min h $= (1 / \max h_0)$ em que max h_0 é a medida de eficiência dada no modelo original.

b) Formulação Dual Recíproca

O modelo toma a forma:

$$\max Z'_0$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j x_{ij} \leq x_{i0'}, \; i = 1, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j y_{rj} \geq Z'_0 y_{r0'}, \; r = 1, ..., t$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha'_j = 1$$

$$\alpha'_j \geq 0, \forall_j, r, i$$

$$\alpha'_j = \frac{\alpha}{Z_0}$$

$$Z'_0 = \frac{1}{Z_0}$$

sendo α_j o coeficiente da unidade j e Z_0 a medida de eficiência do modelo original.

2.1.5. Representações Gráficas

a) Rendimentos decrescentes à escala – Perspectiva de minimização de *inputs*

Na figura 13, a seguir representada, em que se considera apenas um *output* e um *input*, as unidades U_1 e U_3 são tecnicamente eficientes e estão a laborar na escala mais eficiente.

A eficiência técnica da unidade U_4, relativamente à fronteira definida por U_1 e U_3, é dada pelo quociente:

$y_4\ T_4\ /\ y_4\ U_4 < 1$, na formulação original do DEA, isto é, numa perspectiva de minimização do *input*.

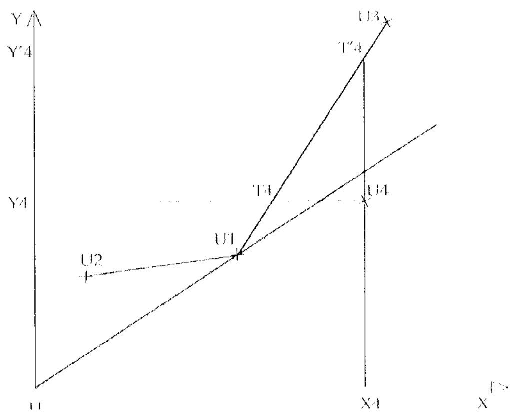

Fig. 13

b) Rendimentos decrescentes à escala – Perspectiva de maximização de *outputs*

Se estivermos numa perspectiva de maximização do output, isto é, na formulação recíproca, essa eficiência viria dada pelo quociente $X_4\ T'_4\ /\ X_4\ U_4 > 1$ de acordo com a figura 14 a seguir representada.

Stoker e Norman (op. cit., pp. 105) demonstram que o valor da ordenada (C_4 na figura 14) é somado ao numerador no cálculo da eficiência, quando estamos perante rendimentos crescentes à escala e subtraído quando estamos perante rendimentos decrescentes à escala.

Na formulação Primal do modelo original a constante C, representativa desse intercepto é somada, portanto o seu valor, é de sinal contrário ao sinal do intercepto, ou seja:

– rendimentos crescentes à escala: C>0, intercepto<0;
– rendimentos decrescentes à escala: C<0, intercepto>0;
– rendimentos constantes, C=0, intercepto=0.

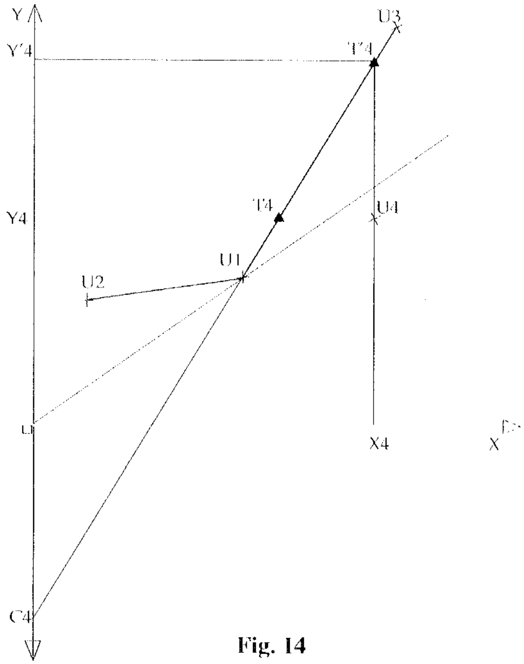

Fig. 14

c) Comparação com a medida de eficiência em rendimentos constantes

Na medida de eficiência em rendimentos constantes à escala, havia uma equivalência entre a medida numa perspectiva de minimização dos *inputs*, e o inverso da medida numa perspectiva de maximização dos *outputs*, verificada pela igualdade dos quocientes: ($y_4 T_4$ / $y_4 U_4$) e ($x_4 U_4$ / $x_4 T'_4$). Com rendimentos crescentes à escala, ou seja, C>0verifica-se, de acordo com a figura 14:

$$(y_4 T_4 / y_4 U_4) > (x_4 U_4 / x_4 T'_4).$$

A medida de eficiência na perspectiva da minimização dos *inputs* é maior do que a medida de eficiência na perspectiva da maximização dos *outputs*, invertendo neste caso o segundo rácio. Com rendimentos decrescentes verifica-se o inverso, conforme mostra a figura 15, a seguir representada.

$(y_4\, T_4 / y_4\, U_4) > (x_4\, U_4 / x_4\, T'_4)$ para $C < 0$.

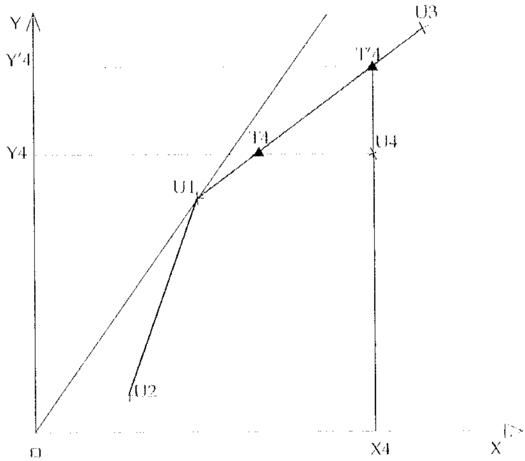

Fig. 15

Aplicando o modelo CCR àquela eficiência os cálculos apresentariam os seguintes valores:

$\max h_4 = u^*_4\, y_4 + C_4$

$v^*_4\, x_4 = 1$

$u^*_4\, y_1 + C - v^*_4\, x_4 < 0$

C tem, como se viu, valor negativo quando estamos perante rendimentos decrescentes à escala e tem valor positivo quando estamos perante rendimentos crescentes à escala.

3. MECÂNICA DO MÉTODO DEA

Neste ponto procura-se ilustrar o funcionamento do DEA tendo como suporte um dos softwares dedicados: "Warwick DEA Software", na versão limitada a 10 DMU's (fornecido com THANASSOULIS, EMMANUEL, (2001), obra citada).

Construímos um exemplo com 10 "units of assessment" designadas no âmbito do DEA por DMU's, na medida em que se assume implicitamente que as variáveis são controláveis.

Admitimos também que o processo de transformação dos inputs em outputs, homogéneo para todas as DMU's (A, B, ..., J), é constituído muito simplesmente por dois inputs (I1 e I2) que dão origem, num contexto igualmente comum a todas as unidades, a um output. A figura 16 ilustra o problema, e os resultados que obtivemos encontram-se no ANEXO: "MECÂNICA DO DEA", nas folhas 1, 2 e 3. Neste ANEXO as DMU's consideradas (A, B, ..., J) encontram-se designadas por "UNITA, UNITB, ..., UNITJ).

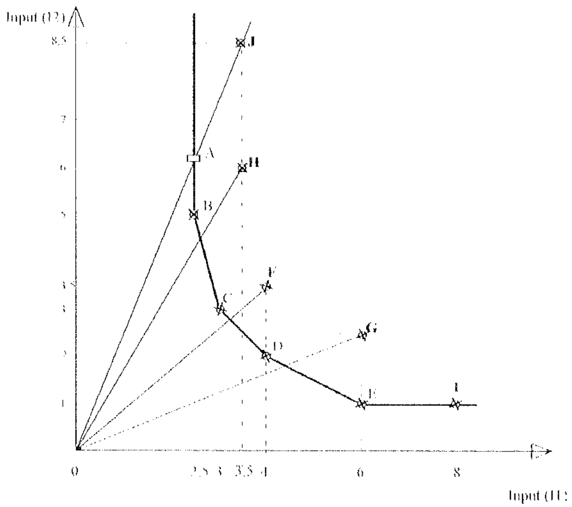

Fig. 16

De acordo com a figura 16, a fronteira eficiente é constituída pelas unidades observadas B, C, D e E e pelos segmentos que as conectam. O conjunto das possibilidades de produção está definido pela fronteira eficiente, pelas unidades A e I (que apresentam apenas 'radial efficiencie', mas que são CCR ineficientes) e por todas as outras que se encontram acima e à direita destas, onde se incluem as unidades observadas F, G, H e J.

As DMU's com eficiência máxima (100%) e que servirão de exemplo de "boa prática" para as ineficientes são, como já mencionamos, as "UNIT" B, C, D e E.

As "UNIT" J, G, H e F conseguem no máximo os seguintes indicadores de eficiência relativa: J=0,7143; G=0,7273; H=0,75 e F=0,80.

Utilizamos a formulação tradicional mais simples do modelo DEA na orientação input, supondo que os rendimentos à escala são constantes: CCR-I.

Previamente vamos descrever de um modo genérico os conteúdos apre-sentados na forma tabular do ANEXO: "MECÂNICA DO DEA".

3.1. Descrição das "TABLES"

a) "TABLE OF EFFICIENCIES"

Contém o máximo rácio OUTPUT/INPUT observado para cada DMU. Possibilita identificar as DMU's eficientes e as não eficientes, atendendo apenas à eficiência técnica.

b) "TABLE OF PEERS UNITS"

Identifica os "pares" de referência para as unidades ineficientes (e para as eficientes), e os valores dos "lambdas" respectivos.

c) "TABLE OF TARGET VALUES"

Descreve os valores "alvo" nos inputs para cada DMU e apresenta os valores (em percentagem) adquiridos e os ganhos a obter para se tornarem eficientes, quer tecnicamente quer considerando também a eliminação da ineficiência mista.

d) "TABLE OF VIRTUAL INPUTS E OUTPUTS"

Mostra, para cada DMU, as ponderações óptimas dos inputs, assim como o contributo de cada input para maximizar o rácio ou "score".

Vamos analisar especificamente os casos das unidades "UNITC", "UNITH", "UNITI" e "UNITJ", tendo em conta a figura 16.1 e as "TABLES" obtidas com o software que utilizamos.

3.2. Interpretação das "TABLES"

– "UNITC"

Pertence à fronteira eficiente e portanto é uma unidade eficiente tecnicamente e CCR eficiente: "radial efficiencie" = 100,00. As unidades de referência "Peers" para esta unidade são a própria unidade C, assumindo lambda o valor de 1 (ver "Peers for UNITC").

Os valores actuais ou observados nos inputs são iguais aos valores "alvo", pelo que os valores a melhorar nos inputs, "TO GAIN", são nulos e os valores adquiridos, "ACHIEVED", nos inputs são 100%. Note-se que uma vez que o modelo é CCR-I os valores "adquiridos" e a "a ganhar" para o output são para qualquer DMU iguais a 100%. (Ver "Targets for UNITC").

O peso óptimo de cada input é 0,1666. Cada um destes pesos multiplicado pela respectiva quantidade de input (0,1666×3 para I1 e 0,1666×3 para I2) dá o valor de 50%. Em conclusão, o rácio O/I da unidade é

$$\frac{100\%}{50\% + 50\%} = 100{,}00 \text{ de eficiência}$$

(ver "Virtual IOs for UNITC").

– "UNITH"

Não é eficiente em termos técnicos, apresenta um rácio igual a 0,75, infe-rior a 1 (ver "Table of efficiencies"). Isto significa que a unidade deverá reduzir em 25% as quantidades actuais utilizadas de I1 e I2, para obter o mesmo output e se tornar eficiente. Esta redução na mesma proporção dos inputs designa-se "contracção radial" e exprime apenas a ineficiência técnica.

As unidades de referência "Peers" para esta unidade são a unidade B e a unidade C, assumindo os lambdas os valores de, respectivamente, 0,75 e 0,25 (ver "Peers for UNITH").

A unidade mais próxima de H é a unidade B (Ver figura 16 e o valor 0,75 para λ_B que é o maior dos dois lambdas). Se fizermos 0,75x2,5 e 0,75x5 obtemos as quantidades de I1 e I2 que a unidade H deve utilizar em referência à unidade B. Fazendo o mesmo para a comparação de H com C, obtemos: 0,25x3 e 0,25x3 que representam respectivamente as quantidades de I1 e de I2 que a unidade H deve utilizar tendo como referência a unidade C. Somando 0,75x2,5 + 0,25x3 = 2,625 e 0,75x5 + 0,25x3 = 4,5. Estes últimos valores (2,625 e 4,5) representam respectivamente as quantidades de input I1 e I2 que a "UNITH" deve empregar para produzir 1 unidade de output eficientemente. Graficamente isso seria reflectido pela intersecção do raio que passa na origem e une H, com o segmento BC da figura 16 – ponto H' da figura 16.1 junta ao ANEXO.

Estes valores de 2,6 e 4,5 são os "alvos" a conseguir pela "UNITH" e aparecem na Table "Targets for UNITH". A unidade H deve diminuir a quantidade utilizada de I1 em 0,9 unidades (de 3,5 para 2,6) e de I2 em 1,5 unidades (de 6 para 4,5) com o que obteria ganho expresso numa poupança de recursos em 25%. Como já referimos, uma vez que o modelo é CCR-I os valores "adquiridos" e de "a ganhar" para o *output* são para esta DMU iguais a 100% (ver "Targets for UNITH").

O peso óptimo do input I1 é 0,2 e o do input I2 é de 0,05. Cada um destes pesos multiplicado pela respectiva quantidade de input (0,2×3,5 para I1 e 0,05×6 para I2) dá os valores de 70% e 30%. Em conclusão, o rácio O/I da unidade é

$$\frac{75\%}{70\% + 30\%} = 0{,}75 \text{ de eficiência}$$

(ver "Virtual IOs for UNITH").

– "UNITI"

É eficiente em termos técnicos (com um rácio igual a 100,00 de acordo com a "Table of efficiencies"), mas apresenta ineficiência mista e portanto é CCR ineficiente. Não pertence à fronteira eficiente (Ver figura 16). Isto significa que a unidade deverá reduzir em proporções diferentes as quantidades actuais utilizadas de I1 e I2, para obter o mesmo output e se tornar eficiente.

Esta unidade tem como referência "Peers" apenas a unidade E , assumindo o lambda [λ_E] o valor de 1 (ver "Peers for UNITI"). Se fizermos 1x6 e 1x1 obtemos as quantidades de I1 e I2 que a unidade I deve utilizar em referência à unidade E. Estes últimos valores (1x6=6 e 1x1=1) são os "targets" a conseguir pela "UNITI" e representam respectivamente as quantidades de input I1 e I2 que a "UNITI" deve empregar para produzir 1 unidade de output eficientemente. A poupança de recursos não é agora proporcional (ver Table "Targets for UNITI" na coluna "TO GAIN").

A melhoria proposta da eficiência para esta unidade traduz-se na eliminação da ineficiência mista (deslocação para a esquerda de I para E na figura 16) que obriga a "UNITI" a diminuir apenas a quantidade utilizada de I1 em 2. Ou seja, a "UNITI" possui um excesso do input I1.

O peso óptimo do input I1 é 0, como podemos observar na Table "Virtual IOs for UNITI", o que quer dizer que estamos em presença de um "slack" e que apesar de esta DMU ser tecnicamente eficiente (100% radial) não é CCR eficiente.

A interpretação da posição da "UNITA" é muito semelhante a esta que fizemos para a "UNITI". Em resumo:

– Apesar de ter um "score" de 100% não é CCR eficiente;

– Tem como "Peer" a unidade B, devendo sofrer um movimento vertical para baixo até B (Ver figura 16), pois apresenta um excesso de input I2;

– Apresenta um "slack" (excesso de input I2 em 1,2 unidades físicas) e por isso o seu "WEIGHT" em I2 é zero.

– "UNITJ"

Apresenta ineficiência em termos técnicos (com um rácio igual a 0,7143) de acordo com a "Table of efficiencies"), cumulativamente com ineficiência mista, pelo que não pertence á fronteira eficiente. (Ver figura 16). Isto significa que a unidade J deverá reduzir em proporções diferentes as quantidades actuais utilizadas de I1 e I2, para obter o mesmo output e se tornar eficiente.

Esta unidade tem como referência, "Peers", apenas a unidade B, assumindo o lambda [λ_B] o valore de 1 (ver "Peers for UNITJ"). Se fizermos 1x2,5 e 1x5 obtemos as quantidades de I1 e I2 que a unidade J deve utilizar em referência à unidade B, i.é. obtemos os valores alvo para que a "UNITJ" se torne eficiente na produção de uma unidade de output (lembremo-nos que as condições do problema se referem às quantidades de I1 e de I2 para produzir 1 de output). A poupança de recursos não é neste caso proporcional. De facto, a "UNITJ" deve reduzir a quantidade observada de I1 em 28,6% e a de I2 em 41,2% (ver Table "Targets for UNITJ" na coluna "TO GAIN").

Por um lado a "UNITJ" deverá sujeitar-se a uma contracção proporcional nos seus inputs (o que promove a sua deslocação para "UNITA"). Uma vez atingida esta posição apresenta ainda um excesso de I2 em 0,2 unidades físicas ("slack"), devendo sujeitar-se a uma redução adicional deste input I2 em 0,2 para eliminar a ineficiência mista. Este último aspecto aparece reflectido na Table "Virtual IOs for UNITJ" cuja coluna de "WEIGHTS" apresenta o valor de zero no input I2.

BIBLIOGRAFIA

– ANDERSON, DAVID R., DENNIS J. SWEENEY e THOMAS A. WILLIAMS (2003), "An introduction no Management Selence – Quantitative Approaches to Decision Making", tenth Edition, Thomson – South Western, USA.

– BANKER, R.D., A. CHARNES e WILLIAM W. COOPER, (1984), "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", Management Science 30.

– BOUSSOFIANE A., DYSON R.G. e THANASSOULIS E. (1991) – "Apllied Data Envelopment Analysis". European Journal of Operational Research 52: 1-15.

– CHARNES, A.,WILLIAM W. COOPER e E. RHODES, (1978), "measuring the Efficiency of Decision Making Units", European Journal of Operational Research, 2 (1978).

– CHARNES, A.,WILLIAM W. COOPER, ARIE Y. LEWIN e LAWRENCE M. SEI-FORD, (1994), "Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Application", Kluwer Academic Publishers, Massachussets.

– COOPER, WILLIAM W., LAWRENCE M. SEIFORD e KAORU TONE, (2002), "Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software", Kluwer Academic Publishers, Massachussets.

– DYSON R. G. e e. THANASSOULIS (1988), "Reducing Weight Flexibility em Data Envelopment Analysis". Journal of the Operational Research Society, Vol. 39 Nº 6.

– NORMAN, MICHAEL e BARRY STOKER, (1991), "Data Envelopment Analysis, the Assessment of Performance", Whiley, England.

– THANASSOULIS, EMMANUEL, (2001), "Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis – A Foundation Text with Integrated Software", Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.