APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO DO RISCO NUM PROJECTO DE INVESTIMENTO, COM INDEPENDÊNCIA E DEPENDÊNCIA DOS FLUXOS

Eduardo Sá Silva

ÍNDICE

1. NOÇÃO DE RISCO

O risco pode ser definido como o grau de incerteza ou a possibilidade de perda, ou seja, a probabilidade de ocorrência do evento gerador dessa perda. No caso de não se ter probabilidades, conduz-nos a uma situação limite de incerteza absoluta que não poderá ser quantificada. No caso em que há hipótese de quantificação, o desvio padrão é a medida de dispersão que nos informa do grau de concentração das probabilidades em torno da média. Quanto menor o risco, mais representativa é a média; naturalmente, quanto maior é o desvio, menos a média representa a distribuição. Assim, por definição o risco deve ser definido como o desvio-padrão do projecto dado pela seguinte expressão:

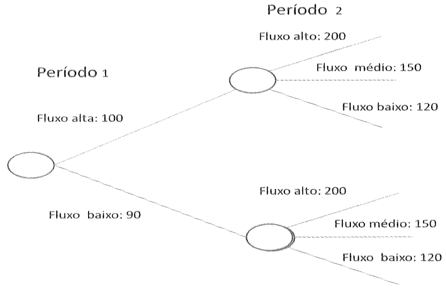
$$VPL_s = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Fs_j}{(1+i)^j}\right)^2 + 2\sum_{j<k}\frac{1}{(1+i)^j}\cdot\frac{1}{(1+i)^k}\,cov\,(F_j, F_k)}$$

situação de total independência. Valores intermédios revelam relações que podem ser mais intensas quando se aproxima do coeficiente de correlação de 1, ou menos intensas quando o coeficiente se aproxima de 0

2.1. SITUAÇÃO DE INDEPENDÊNCIA

Retomando os fluxos do período 1 e 2, pode-se construir o seguinte esquema:

Esquema – 1: comportamento dos fluxos



Conforme evidencia o esquema o comportamento dos fluxos do período 2 é independente do que acontece no período 1, o que conduz a que a covariância seja igual a zero:

Quadro 4 – cálculo da covariância (situação de independência)

Independência dos fluxos entre períodos
cálculo da covariância

F1	E(F1)	Dif. F1	Pr(F1)	F2	E(F2)	Dif.F2	Pr(F2)	Covariânc	Pr(F1) x Pr(F2)	Situação
100	98	2	0,8	200	177	23	0,6	22,08	0,48	alta(F1)x alta(F2)
100	98	2	0,8	150	177	-27	0,3	-12,96	0,24	alta(F1)x media(F2)
100	98	2	0,8	120	177	-57	0,1	-9,12	0,08	alta(F1)x baixa(F2)
90	98	-8	0,2	200	177	23	0,6	-22,08	0,12	baixa(F1)x alta(F2)
90	98	-8	0,2	150	177	-27	0,3	12,96	0,06	baixa(F1)x média(F2)
90	98	-8	0,2	120	177	-57	0,1	9,12	0,02	baixa(F1)x baixa(F2)
							total	0	a covariância será sempre igual a 0	

Neste caso, as probabilidades conjuntas serão as seguintes que são iguais às iniciais para o período 2:

Quadro 5 – cálculo das probabilidades conjuntas (independência)

probabilidades do período 2	
alta (0,48+0,24)	60,00%
média (0,24+0,12)	30,00%
baixa (0,08+0,02)	10,00%
Total	100,00%

Pode-se efectuar um teste alterando as probabilidades do período 2 para 50% (alta); 20% (média) e 30% (baixa), que conduz igualmente a que a covariância seja igual a zero:

Quadro 6 – cálculo com novas probabilidades no período 2 (independência)

Independência dos fluxos entre períodos
cálculo da covariância

F1	E(F1)	Dif. F1	Pr(F1)	F2	E(F2)	Dif.F2	Pr(F2)	Covariânc	Pr(F1) x Pr(F2)	Situação
100	98	2	0,8	200	177	23	0,5	18,4	0,4	alta(F1)x alta(F2)
100	98	2	0,8	150	177	-27	0,2	-8,64	0,16	alta(F1)x media(F2)
100	98	2	0,8	120	177	-57	0,3	-27,36	0,24	alta(F1)x baixa(F2)
90	98	-8	0,2	200	177	23	0,5	-18,4	0,1	baixa(F1)x alta(F2)
90	98	-8	0,2	150	177	-27	0,2	8,64	0,04	baixa(F1)x média(F2)
90	98	-8	0,2	120	177	-57	0,3	27,36	0,06	baixa(F1)x baixa(F2)
							total	0	a covariância será sempre igual a 0	

Assim, no caso de total independência o desvio padrão do projecto - VPL_s resume-se a:

$$VPL_s = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Fs_j}{(1+i)^j}\right)^2}$$

Com os cálculos, partindo do pressuposto de uma taxa de actualização de 10%

Período	variância	f. actualiz ^2	Produto
F1	16	0,826446	13,22314
F2	861	0,683013	588,0746
Variância			601,2977
desvio padrão do projecto			24,52137

Ou seja:

$$VPL_s = \sqrt{601{,}2977} = 24{,}52137$$

2.2. SITUAÇÃO DE TOTAL DEPENDÊNCIA

No caso de total dependência (risco máximo), o coeficiente de correlação assume o valor de 1 e a fórmula do VPL_s passa a ser a seguinte expressão:

$$VPL_s = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Fs_j}{(1+i)^j}\right)^2 + 2\sum_{j<k}\frac{Fs_j}{(1+i)^j}\cdot\frac{Fs_k}{((1+i)^k}}$$

Ou seja, para os valores em causa:

$$VPL_s = \sqrt{601{,}19 + 2\,.\,\frac{4}{(1+10\%)^1}\cdot\frac{29{,}34}{(1+10\%)^2}} = 27{,}884$$

Em alternativa, o VPL s pode ser obtido pela actualização dos desvios padrão dos fluxos dos dois períodos:

$$VPL_s = \frac{4}{(1+10\%)^1} + \frac{29{,}34}{(1+10\%)^2} = 27{,}884$$

O valor de 27,884 representa o limite máximo do risco, dado que os fluxos estão perfeitamente correlacionados.

2.3. SITUAÇÃO DE ALGUMA DEPENDÊNCIA

Duas variáveis aleatórias são independentes se, e somente se, a probabilidade conjunta[1] é igual ao produto das suas probabilidades. Nessa situação, P(F1, F2) = P(F1) . P(F2), para todos os valores da distribuição. Então, as variáveis F1 e F2 são independentes e, nestas condições, a covariância (F1, F2) = 0.

Quando o cálculo das probabilidades de uma variável for dependente da

[1] A probabilidade conjunta é expressa por P(F1,F2) ou P(F1 Ω f2)

ocorrência de outra variável, então fica caracterizada a dependência entre as variáveis que é dada pela seguinte expressão:

P (F1 , F2) = P(F2) . P(F2/F1)

Neste caso, está-se perante uma probabilidade condicionada que se refere à probabilidade de F2 estar dependente da ocorrência de F1 e representa-se por P (F2/F1).

Analisemos a seguinte alteração nas probabilidades do período 2:

Quadro 7 – probabilidades condicionadas

período 1			período 2		
procura	valor	Pr (F1)	procura	valor	Pr (F2)
alta	100	0,8	alta	200	0,7
			média	150	0,2
			baixa	120	0,1
baixa	98	0,2	alta	200	0,1
			média	150	0,8
			baixa	120	0,1

Nota-se claramente que a probabilidade é mais elevada no período 2[2], desde que tenha sido alta no período 1. Passa-se uma situação diversa com a procura baixa. Assim, o que acontece no período 2 está comprometido com o que se passa no período 1.

Deste modo, existe uma relação entre os fluxos do período 1 e do período 2 que é dado pela análise da covariância.

[2] A probabilidade de A condicionada por B (ou dado B, ou sabendo que B) é definida por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

dado $P(B) > 0$

Assim, a probabilidade de A muda após o evento B ter acontecido. Isso porque o resultado de A é uma das possibilidades de B. Precisamos calcular os eventos que são comuns a B e também a A, ou seja $A \cap B$

Quadro 8 – cálculo da covariância e coeficiente de correlação (probabilidade condicionada)

alguma dependência de fluxos entre períodos										
cálculo da covariância										
F1	E(F1)	Dif. F1	Pr(F1)	F2	E(F2)	Dif.F2	Pr(F2)	Covariânc	Pr(F1) x Pr(F2)	Situação
100	98	2	0,8	200	182	18	0,7	20,16	0,56	alta(F1)x alta(F2)
100	98	2	0,8	150	182	-32	0,2	-10,24	0,16	alta(F1)x media(F2)
100	98	2	0,8	120	182	-62	0,1	-9,92	0,08	alta(F1)x baixa(F2)
90	98	-8	0,2	200	182	18	0,1	-2,88	0,02	baixa(F1)x alta(F2)
90	98	-8	0,2	150	182	-32	0,8	40,96	0,16	baixa(F1)x média(F2)
90	98	-8	0,2	120	182	-62	0,1	9,92	0,02	baixa(F1)x baixa(F2)
						covariância		48		
						desvio padrão F1		4		
						desvio Padrão F2		29,34		
						produto		117,36		
						coeficiente de corre		0,408998		

O que conduz às seguintes probabilidades conjuntas

Quadro 9 – cálculo das probabilidades conjuntas

probabilidade do período 2	
alta (0,56+0,02)	58,00%
média (0,16+0,16)	32,00%
baixa (0,08+0,02)	10,00%
Total	100,00%

Neste caso, o cálculo será:

$$VPL_s = \sqrt{601{,}19 + 2\,.\,0{,}408\,.\,\frac{4}{(1{+}10\%)^1}\,.\,\frac{29{,}34}{(1{+}10\%)^2}} = 25{,}70821$$

Em que: 0,408 é o coeficiente de correlação

2.4. COMPARAÇÃO DAS SITUAÇÕES

Em termos comparativos, pode-se construir o seguinte quadro

Quadro 10 – comparativo das várias situações

A fórmula geral						
				independência	alguma dependência	dependência
componente fixa						
taxa de actualização	10%	factor actual.	produto			
variância de F1	16	0,826446	13,22314			
variância de F2	861	0,683013	588,0746			
componente fixa			601,2977			
factor multiplicativo			2			
coeficiente correlação				0	0,408997955	1
desvio padrão de F1	4	0,909091	3,636364			
desvio padrão de F2	29,3428	0,826446	24,25025			
Desvio Padrão do Projecto				24,52137283	25,95054592	27,88661281

Pode-se verificar que o valor mais baixo do desvio (risco) do projecto corresponde à independência dos fluxos (coeficiente de correlação de 0), e o mais alto à dependência (coeficiente de correlação de 1).

3. EXTENSÃO DA FÓRMULA DE CÁLCULO DO DESVIO-PADRÃO (RISCO) PARA N PERÍODOS

A fórmula inicial pode ser apresentada para dois períodos, como segue:

$$VPL\ s = \sqrt{\frac{Fs1^2}{(1{+}i)^2} + \frac{Fs2^2}{(1{+}i)^4} + 2.\frac{1}{(1{+}i)^1}\,.\,\frac{1}{(1{+}i)^2}\,.\,\mathrm{cov}\,(F_1, F_2)}$$

Ou (com o coeficiente de correlação):

$$VPL\ s = \sqrt{\frac{Fs1^2}{(1{+}i)^2} + \frac{Fs2^2}{(1{+}i)^4} + 2.\,\rho F_1 F_2\ \frac{Fs1}{(1{+}i)}\,.\,\frac{Fs2}{(1{+}i)^2}}$$

Em que:

F = distribuição dos fluxos do período. No caso em apreço F1 (F11 e F12, correspondentes à procura alta e baixa, no período 1) e F2 (F21, F22 e F23, correspondentes às procuras alta, média e baixa, no período 2).

Fs – desvio padrão do período

i = taxa de actualização

$\rho F_1 F_2$ = coeficiente de correlação entre as distribuições dos períodos

cov = covariância

Em que se pode destacar duas componentes:

. uma ligada à variância: $\frac{Fs1^2}{(1+i)^2} + \frac{Fs2^2}{(1+i)^4}$

. outra ligada à covariância: $2.\frac{1}{(1+i)^1}.\frac{1}{(1+i)^2}.\text{cov}(F_1, F_2)$ ou $2.\rho F_1 F_2.\frac{Fs1}{(1+i)^1}.\frac{Fs2}{(1+i)^2}$

No caso de três períodos a fórmula seria deveras mais complexa, com as seguintes componentes:

. variância: $\frac{Fs1^2}{(1+i)^2} + \frac{Fs2^2}{(1+i)^4} + \frac{Fs3^2}{(1+i)^6}$

. covariância: $2.\left(\frac{1}{(1+i)^1}.\frac{1}{(1+i)^2}.\text{cov}(F_1, F_2) + \frac{1}{(1+i)^1}.\frac{1}{(1+i)^3}.\text{cov}(F_1, F_3) + \frac{1}{(1+i)^2}.\frac{1}{(1+i)^3}.\text{cov}(F_2, F_3)\right)$

Que cresceria de forma significativa, à medida que fossem considerados mais períodos. Para 4 períodos, ter-se-ia 6 combinações de covariâncias. O número de covariâncias pode ser determinado através da seguinte fórmula:

Número de combinações de covariâncias = (n . (n -1)) / 2. Assim para três períodos, ter-se-ia: 3. 2/2 = 3 e para quatro: 4.3/2 = 6

Em que:

n – representa o número de períodos

Para obviar a esta questão, deve-se utilizar matrizes que simplificarão o processo de cálculo, a saber:

$$VPL_s = \sqrt{Fms\,.\,[Cm]\,.\,Fms^T}$$

Em que:

Fms = matriz dos desvios-padrões (risco)

Cm = matriz da correlação que mede o efeito da dependência / independência dos períodos

Fms^T = matriz transposta dos desvios-padrões (risco)

Aplicação às situações referidas anteriormente, utilizando a função do Excel (matriz.mult)

INDEPENDÊNCIA

3,636364	24,25025	1	0	3,636364
		0	1	24,25025

601,2977 MATRIZ.MULT

24,52137

ALGUMA DEPENDÊNCIA

3,636364	24,25025	1	0,408998	3,636364
		0,408998	1	24,25025

673,4308 MATRIZ.MULT

25,95055

DEPENDÊNCIA

3,636364	24,25025	1	1	3,636364
		1	1	24,25025

777,6632 MATRIZ.MULT

27,88661

4. CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA

O comportamento aleatório do VAL (valor actual líquido) ou VPL (valor presente líquido) resulta do somatório do comportamento de outras variáveis aleatórias. Em virtude do teorema do limite central, a soma de variáveis aleatórias independentes tende para uma distribuição normal. A convergência para este teorema do limite central verifica-se quando o número de componentes é igual ou superior a dez. Se o número de componentes é inferior a dez ou os fluxos de caixa dos distintos períodos não são independentes, já não se pode fundamentar a normalidade. Neste caso, há que procurar outra lei de probabilidade e para descobri-la há que efectuar provas de aderência, utilizando para esse efeito algum dos métodos que são proporcionados pela estatística (p.e o teste de chi-quadrado de Pearson). No entanto, a busca por estes métodos são bastante complexas e, por uma razão de simplificação, aceita-se, regra geral, a hipótese de normalidade sem qualquer questão.

Assim, para o caso em apreço tem-se os seguintes dados

E(VAL) = E(F1) / (1+i) + E(F2) / (1+i)^2

Sendo E(F1) e E(F2) os valores dos fluxos esperados para os períodos 1 e 2, respectivamente, que, por uma questão de simplificação, identificamos como as médias dos fluxos nos dois períodos, ou seja:

Quadro 11 – cálculo do valor esperado do VAL

período	E(F)	Actualização 10%	Valor actual
1	98	0,91	89,09
2	177	0,83	146,28
		E(VAL)	235,37

E o desvio padrão (risco) em situação de independência- VPL_s = 24,52

Apresentemos uma série de quadros, fazendo variar quer o desvio-padrão (risco), quer a média (VAL – associado com rentabilidade do projecto).

Quadro 12 – valores originais da média (E(VAL) e desvio-padrão (VPLs)

	teste 1	teste 2	teste 3	teste 4	teste 6	teste 7
média: E(VAL)	235,37					
desvio: VPLs	24,52137					
Valor	259,89	210,85	235,37	0	284,4146	186,3292
distri. cumulativa normal	84,13%	15,87%	50,00%	0,00%	97,72%	2,28%
teste 1 - teste 2	68,27%					
teste 6 - teste 7					95,45%	
coeficiente de variação	0,104181					

A distribuição cumulativa normal é uma função existente no EXCEL (dist. normal)

Os valores do teste 1 e teste 2 resultam dos valores que conduzem a 68,27% de probabilidade de ocorrerem (média +/- desvio-padrão). Os valores do teste 6 e teste 7 resultam, por sua vez, dos valores que conduzem a 95,45% de probabilidade de ocorrem (média +/- 2 . desvio-padrão)

O coeficiente de variação resulta do quociente do desvio-padrão pela média e indica em percentagem o quanto o desvio é parte da média. Neste caso, só 10,41% é explicado pela média. Um valor elevado do coeficiente de variação indica-nos um projecto arriscado.

Saliente-se que, neste caso, a probabilidade do projecto apresentar um E(VAL) negativo é nulo.

Quadro 13 – valores originais de E(VAL) e incremento do risco (desvio-padrão)

	teste 1	teste 2	teste 3	teste 4	teste 6	teste 7
média: E(VAL)	235,37					
desvio: VPLs	180					
Valor	415,37	55,37	235,37	0	595,3719	-124,628
distri. cumulativa normal	84,13%	15,87%	50,00%	9,55%	97,72%	2,28%
teste 1 - teste 2	68,27%					
teste 6 - teste 7					95,45%	
coeficiente de variação	0,764747					

Nota-se um incremento significativo do coeficiente de variação (76,64%) e o aparecimento do E(VAL) apresentar valores negativos (9,55%).

Quadro 14 – diminuição do E(VAL) e incremento do risco (desvio-padrão)

	teste 1	teste 2	teste 3	teste 4	teste 6	teste 7
média: E(VAL)	100,00					
desvio: VPLs	180					
Valor	280,00	-80,00	100,00	0	460	-260
distri. cumulativa normal	84,13%	15,87%	50,00%	28,93%	97,72%	2,28%
teste 1 - teste 2	68,27%					
teste 6 - teste 7					95,45%	
coeficiente de variação	1,8					

Nesta situação verifica-se uma diminuição significativa do E(VAL), bem como uma dispersão acentuada dos fluxos que conduz a uma situação deveras arriscada, em que a probabilidade de ter perdas (valores negativos) é relevante.

5. A UTILIZAÇÃO DA SIMULAÇÃO MONTE CARLO

Dada uma distribuição de probabilidades, as simulações (cenários) Monte Carlo possibilitam a construção de uma amostra gerada de forma (pseudo) aleatória, tendo em conta a referida distribuição.

A flexibilidade da simulação Monte Carlo permite, assim. a geração de cenários para um amplo conjunto de pontos no tempo, permitindo simular trajectórias de evolução.

Suponha-se o seguinte caso, em que foram recolhidas as seguintes procuras (vendas) em períodos transactos:

Quadro 15 – vendas ocorridas em períodos transactos

período anterior	anterior
-1	30
-2	65
-3	45
-4	38
-5	60
-6	63
média	50,16667
desvio-padrão	14,57967

Com base nesta informação, pretende-se através da simulação Monte Carlo estimar uma distribuição de procura (vendas) para o período seguinte (estimativa futura). Para o efeito, ir-se-á utilizar a função do Excel – aleatório () que gera um número aleatório maior ou igual a 0 e menor que 1, segundo uma distribuição uniforme (os números aleatórios alteram-se quando são de novo calculados). Foram efectuadas 15 ocorrências. A coluna de inversa normal (função do Excel - INV.NORMP) devolve o inverso da função cumulativa normal padrão. A coluna de "valor simulação MC" determina o valor da procura (venda) de acordo com a distribuição inicial. Deste modo, para a primeira ocorrência tem-se:

$$29{,}14527 = 50{,}16667 - 1{,}44528 \,.\, 14{,}57967$$

Para as outras ocorrências, o processo de cálculo é similar. Na última considera-se que a procura será baixa se inferior a 40, média se compreendida entre 40 e 65 e alta se superior a 65. Neste caso, estima-se que para o período seguinte a probabilidade (valor compreendido entre 0 e 1) de procura será: procura baixa – 20%; procura média – 66,67% e procura alta – 13,33%

Quadro 16 – simulação 1 da procura (venda) para o período seguinte

número aleatório Ocorrência		inversa normal	valor sim. Mc	Procura
1	0,074675	-1,44183	29,14527	Baixa
2	0,179947	-0,91557	36,81803	Baixa
3	0,221261	-0,76794	38,97036	Baixa
4	0,249303	-0,67668	40,30084	Média
5	0,308963	-0,49879	42,89443	Média
6	0,397372	-0,26016	46,37367	Média
7	0,454545	-0,11419	48,50187	Média
8	0,604518	0,265059	54,03113	Média
9	0,6071	0,271769	54,12897	Média
10	0,610977	0,281865	54,27617	Média
11	0,795391	0,825271	62,19885	Média
12	0,842545	1,004972	64,81883	Média
13	0,916946	1,384816	70,35682	Alta
15	0,934318	1,508743	72,16363	Alta
		média	51,06992	
		desvio-padrão	13,00854	
	Baixa	3	20,00%	
	média	10	66,67%	
	Alta	2	13,33%	
	Total	15	100,00%	

Se correr outra simulação, os valores serão outros:

Quadro 17 – Simulação 2 da procura (venda) para o período seguinte

número ocorrência	aleatório	inversa normal	valor sim. Mc	procura
1	0,062041	-1,53787	27,7451	baixa
2	0,082473	-1,38862	29,92098	baixa
3	0,103839	-1,25998	31,79665	baixa
4	0,113088	-1,21027	32,52137	baixa
5	0,275742	-0,59554	41,48391	média
6	0,350232	-0,38469	44,55796	média
7	0,441012	-0,1484	48,00298	média
8	0,55281	0,132764	52,10232	média
9	0,637375	0,351451	55,29071	média
10	0,662971	0,420585	56,29866	média
11	0,681674	0,472386	57,05389	média
12	0,72316	0,592256	58,80156	média
13	0,890369	1,228491	68,07766	alta
15	0,96661	1,833151	76,89339	alta
		média	51,06992	
		desvio-padrão	13,00854	
	baixa	4	26,67%	
	média	9	60,00%	
	alta	2	13,33%	
	total	15	100,00%	

Deste modo, pode-se efectuar o número de simulações que se entender, com o número de ocorrências que se desejar. Os *outputs* serão considerados para efeitos de estimativas futuras das procuras. A simulação Monte Carlo pode ser aplicado a outras variáveis para as quais seja necessário efectuar estimativas, como por exemplo, gastos, prazos médios, taxas, etc..

OBRAS BASE:

. Instituto Superior de Gestão Bancária (2012) *Gestão de Activos e Passivos*
. Securato, José (1993) *Decisões financeiras em condições de risco*, São Paulo, Atlas
. Silva, Eduardo (2011) *Análise de Investimentos*, 2ª Edição, Vida Económica
. Silva, Eduardo (2012) *Análise de Fluxos Financeiros*, 5ª Edição, Vida Económica
. Suárez, Andrés (1979) *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*, Madrid, Piramide